Capítulo 10

Autómatas con dos pilas

En este capítulo se presenta un nuevo modelo de autómatas para el análisis de los lenguajes de adjunción de árboles, basado en la utilización de dos pilas que actúan coordinadamente. Las aportaciones de este capítulo se refieren a la definición de los autómatas con dos pilas fuertemente dirigidos y a la definición de los autómatas con dos pilas ascendentes, junto con las técnicas de tabulación para ambos. Este capítulo está basado en [53, 21, 54].

10.1 Introducción

En los capítulos anteriores se han definido diversas extensiones de los autómatas a pila que aceptan la clase de los lenguajes de adjunción de árboles. Básicamente, tales extensiones consisten en asociar a los elementos de la pila del autómata una pila de índices. En los autómatas lógicos a pila restringidos y en los autómatas lineales de índices esta característica está en la propia definición del modelo. En el caso de los autómatas a pila embebidos y su variante ascendente esta característica está también presente, aunque de modo implícito: la cima de cada una de las pilas individuales juega el papel de símbolo de pila mientras el resto de cada pila juega el papel de pila de índices asociada a dicho símbolo.

En este capítulo ofrecemos un enfoque diferente, puesto que en lugar de trabajar con una pila de símbolos de pila asociados a pilas de índices, trabajaremos con dos pilas, una equivalente a la pila de los autómatas a pila originales, y otra en la que se almacenan, en principio, índices, de tal modo que los elementos almacenados en esta segunda pila restringen los movimientos que se pueden realizar sobre la primera.

Una manera común de simular una máquina de Turing consiste en definir un autómata a pila que trabaja sobre dos pilas. Será, por tanto, necesario definir cuidadosamente el conjunto de transiciones permitido con el fin de diseñar modelos de autómatas con dos pilas que acepten exactamente los lenguajes de adjunción de árboles. En lo que resta de capítulo, se describen los autómatas con dos pilas tal y como fueron originalmente descritos por Becker [25], para continuar luego con la definición de los autómatas con dos pila fuertemente dirigidos [53] y los autómatas con dos pilas ascendentes [54].

10.2 Autómatas con dos pilas

Becker define en [25] los autómatas con dos pilas (*2–Stack automata*, 2–SA) como una extensión de los autómatas a pila en la que se permite realizar las siguientes operaciones:

- Leer un terminal de la cadena de entrada.

- Apilar un símbolo de pila en la primera pila.
- Eliminar de la primera pila el símbolo situado en su cima.
- Apilar un símbolo en la segunda pila.
- Situar en la cima de cada pila un símbolo especial denominado *separador*.
- Eliminar de la cima de las dos pilas el símbolo separador.
- En el caso de que en la cima de primera pila se encuentre un separador, eliminar de la segunda pila el símbolo situado en su cima

Formalmente, definiremos un autómata con dos pilas como una tupla $(Q, V_T, V_S, \delta, q_0, \llbracket, \$_0)$, donde:

- Q es un conjunto finito de estados.
- V_T es un conjunto finito de símbolos terminales.
- V_S es un conjunto finito de símbolos de pila.
- q_0 es el estado inicial.
- $\llbracket \notin V_S$ es el símbolo separador.
- $\$_0 \in V_S$ es el símbolo inicial de ambas pilas.
- δ es un conjunto finito de transiciones de alguno de los tres tipos siguientes:

$$(q', \alpha_1, Z_2\alpha_2) \in \delta(q, a, Z_1, Z_2)$$

$$(q', \llbracket, \alpha_3) \in \delta(q, a, \llbracket, Z_3)$$

$$(q', \epsilon, \epsilon) \in \delta(q, a, \llbracket, \llbracket)$$

donde $q, q' \in Q$, $a \in V_T \cup \{\epsilon\}$, $Z_1, Z_3 \in V_S$, $Z_2 \in V_S \cup \{\llbracket\}$, $\alpha_1, \alpha_2 \in V_S^* \cup V_S \llbracket V_S^*$ cumpliéndose además que α_1 incluye un separador si y sólo si α_2 también lo incluye, y $\alpha_3 \in V_S^*$. El primer tipo de transiciones permite apilar elementos en la primera y/o segunda pila y extraer elementos de la primera pila. Las transiciones del segundo tipo permiten extraer símbolos de la segunda pila si y sólo si la cima de la primera pila está ocupada por un separador. El tercer tipo de transiciones permite eliminar los separadores de la cima de ambas pilas.

La *configuración* de un autómata con dos pilas en un momento dado viene definida por la tupla $(q, \Upsilon_1, \Upsilon_2, w)$, donde $q \in Q$ indica el estado en el que se encuentra, $\Upsilon_1, \Upsilon_2 \in (\llbracket V_S^*)^*$ es el contenido de la primera y segunda pila. El cambio de una configuración a otra viene determinado por la aplicación de una transición, de tal modo que si $(q, \Upsilon_1 Z_1, \Upsilon_2 Z_2, aw)$ es una configuración y $(q', \alpha_1, \alpha_2) \in \delta(q, a, Z_1, Z_2)$ es una transición, entonces el autómata con dos pilas pasa a la nueva configuración $(q', \Upsilon_1\alpha_1, \Upsilon_2\alpha_2, w)$. Este hecho se denota mediante

$$(q, \Upsilon_1 Z_1, \Upsilon_2 Z_2, aw) \vdash (q', \Upsilon_1\alpha_1, \Upsilon_2\alpha_2, w)$$

Denotamos por $\overset{*}{\vdash}$ el cierre reflexivo y transitivo de $\vdash$.

El *lenguaje aceptado por pila vacía* por un autómata con dos pilas viene determinado por el conjunto de cadenas $w \in V_T^*$ tal que $(q_0, [\$_0, [\$_0, w) \overset{*}{\vdash} (q, \epsilon, \epsilon, \epsilon)$ para cualquier $q \in Q$.

Los autómatas con dos pilas tal y como han sido definidos aceptan exactamente la clase de los lenguajes de adjunción de árboles. Para demostrarlo nos basaremos en la equivalencia entre los 2–SA y los autómatas a pila embebidos definidos en el capítulo 6.

Teorema 10.1 *Los lenguajes aceptados por los autómatas con dos pilas son un subconjunto de los lenguajes de adjunción de árboles.*

Demostración:

Siguiendo la demostración de Becker en [25], dado un autómata con dos pilas $\mathcal{A} = (Q, V_T, V_S, \delta, q_0, [\ \ , \$_0)$, construiremos un autómata a pila embebido con estados $\mathcal{E} = (Q', V_T, V_S', \delta', q_0', Q_F', \$_0)$ tal que $V_S' = V_S \cup \{\sharp\}$, los estados en Q' serán triples $\langle q, S_i, Z_2 \rangle$ con $q \in Q$, $Z_2 \in V_S \cup \{\sharp\}$, $q_0' = \langle q_0, S1, \$_0 \rangle$ y las transiciones en δ' se construirán a partir de las transiciones en δ de tal modo que:

$S_i = S_1$ si la cima de la primera pila del 2–SA no es un separador. La cima del EPDA equivaldrá a la cima de la primera pila del 2–SA y las pilas unitarias del EPDA situadas inmediatamente debajo de su cima representarán a los elementos de la segunda pila del 2-SA situados por encima del último separador. El resto de las pilas del EPDA repetirán esta representación para la siguiente porción de las pilas del 2–SA situada entre dos separadores.

$S_i = S_2$ si la cima de la primera pila del 2–SA es un separador. La cima del EPDA contendrá la cima de la segunda pila del 2–SA.

Para ello, transformaremos cada transición $(q', \alpha_1, Z_2\alpha_2) \in \delta(q, a, Z_1, Z_2)$, con $Z_1 \in V_S$, $\alpha_1 \in V_S^*$ y $\alpha_2 = Y_1 Y_2 \ldots Y_m$, en la transición

$$(\langle q', S_1, Y_m \rangle, [Y_1 [Y_2 \ldots [Y_m, \alpha_1, \epsilon) \in \delta'(\langle q, S_1, Z_2 \rangle, a, Z_1)$$

En el caso de que $\alpha_1 = \beta_1 [\beta_2$ y $\alpha_2 = Y_1 \ldots Y_k [Y_{k+1} \ldots Y_m$, la transición resultante del EPDA será

$$(\langle q', s_1, Y_m \rangle, [Y_1 \ldots [Y_k, \beta_1, [[\sharp, Z_2][Y_{k+1} \ldots [Y_m [\sharp\beta_2) \in \delta'(\langle q, S_1, Z_2 \rangle, a, Z_1)$$

donde $\sharp$ es un símbolo especial que representa el separador del 2–SA y $[\sharp, Z_2]$ es un símbolo especial que codifica la anterior cima de la segunda pila del 2–SA, con el fin de poder recuperarla posteriormente.

En el caso de que $Z_1 = [$ y $\alpha_2 = Y_1 \ldots Y_m$, la transición del EPDA será

$$(\langle q', S_2, Y_m \rangle, \epsilon, \epsilon, [Y_1 \ldots [Y_m) \in \delta'(\langle q, S_2, Z_2 \rangle, a, Z_2)$$

Adicionalmente, para todo $a \in Q$ crearemos las transiciones

$$(\langle q, S_2, Z_2 \rangle, \epsilon, \epsilon, \epsilon) \in \delta'(\langle q, S_1, Z_2 \rangle, \epsilon, \sharp)$$

que permiten comenzar a manipular la segunda del 2–SA cuando en la cima de la primera está un separador. También será preciso añadir, para todo $q \in Q$, las transiciones

$$(\langle q, S_1, Z' \rangle, \epsilon, \epsilon, \epsilon) \in \delta'(\langle q, S_2, Z_2 \rangle, \epsilon, [\sharp, Z'])$$

que permiten terminar la manipulación de la segunda pila del 2–SA cuando lleguemos a tener un separador en la cima de la misma. $\square$

Teorema 10.2 *Los lenguajes de adjunción de árboles son un subconjunto de los lenguajes aceptados por los autómatas con dos pilas.*

<u>Demostración</u>:

La demostración propuesta en [25] de que todo EPDA puede ser transformado en un 2–SA equivalente es errónea[1], por lo que plantearemos aquí una versión modificada de la misma.

Dado un autómata a pila embebido con estados $\mathcal{E} = (Q, V_T, V_S, \delta, q_0, Q_F, \$_0)$ construiremos un autómata con dos pilas $\mathcal{A} = (Q, V_T, V_S', \delta', q_0, [\,, \$_0)$, con $VS' = V_S \cup \{\sharp\}$. Cada transición del EPDA

$$(q', [Z_k' \ldots [Z_{i+1}', Z_m \ldots Z_1, [Z_i' \ldots [Z_1') \in \delta(q, a, Z)$$

donde $q, q' \in Q$, $a \in V_T \cup \{\epsilon\}$, $Z, Z_1, \ldots, Z_m, Z_1', \ldots, Z_k \in V_S$ y $m \leq 2$, se transformará en las siguientes transiciones del 2–SA, para todo $Z'' \in V_S$:

$$(q', Z_m \ldots Z_1 [Z_i' \ldots [Z_1', Z'' \sharp Z_k' \ldots Z_{i+1}' [\ldots [\,) \in \delta'(q, a, Z, Z'')$$

donde el número de separadores en ambas pilas es es el mismo y $\sharp$ es un nuevo símbolo de pila utilizado para separar las pilas unitarias que permanecen en espera en la segunda pila del 2–SA. Este tipo de transiciones no forman parte de las transiciones elementales que hemos propuesto para los autómatas con dos pilas puesto que se introduce más de un separador, pero pueden ser obtenidas mediante la aplicación sucesiva de dichas transiciones [25] y son utilizadas aquí para simplificar la prueba.

Adicionalmente, para todo $q \in Q$ deberemos añadir las transiciones

$$(q, \epsilon, \epsilon) \in \delta(q, a, [\,, [\,)$$

que eliminan los separadores, las transiciones

$$(q, [Z_2, \epsilon) \in \delta(q, \epsilon, [, Z_2)$$

que pasan elementos de la segunda pila a la primera para procesar aquellas pilas unitarias que habían sido dejadas en espera y las transiciones

$$(q, [, \epsilon) \in \delta(q, \epsilon, [, \sharp)$$

que finalizan el procesamiento de las pilas unitarias dejadas en espera. □

Los autómatas con dos pilas que acabamos de definir presentan un interés meramente teórico, puesto que la definición de esquemas de compilación para LIG y TAG dista de ser simple y porque no ha sido posible diseñar hasta el momento una técnica de tabulación que permite su ejecución en tiempo polinomial.

10.3 Autómatas con dos pilas fuertemente dirigidos

Puesto que los autómatas con dos pilas presentados en la sección precedente no son satisfactorios, procederemos a su redefinición. Los objetivos de la misma son, por una parte, permitir la descripción de forma simple de esquemas de compilación para LIG y TAG, y por otra parte posibilitar el desarrollo de una técnica de tabulación que permita ejecutar dichos autómatas en tiempo polinomial.

[1] Tilman Becker, comunicación personal, 1996.

Seguiremos suponiendo que dichos autómatas constan de dos pilas, una de las cuales recibirá el nombre de *pila maestra* (*master stack*, **MS**) mientras que la otra se denominará *pila auxiliar* (*auxiliary stack*, **AS**). En ambas pilas se almacenarán elementos de un alfabeto de pila y separadores. Denominaremos *sesión* a la parte de cada pila comprendida entre dos de dichos separadores. El número de sesiones debe ser el mismo en ambas pilas. Prescindiremos del control de estado finito, tal y como hemos hecho anteriormente en el caso de los autómatas a pila (capítulo 5) y los autómatas a pila embebidos (capítulos 6 y 7).

Si no se establece ninguna restricción, las dos pilas del autómata pueden ser utilizadas combinadamente para emular una máquina de Turing [85]. Con el fin de limitar la potencia expresiva a la clase de los lenguajes de adjunción de árboles, restringiremos las operaciones permitidas en cada pila en función de los dos modos siguientes de trabajo:

- Un *modo de escritura* **w** en el cual no se permite extraer elementos de la pila maestra.
- Un *modo de borrado* **e** en el cual no se permite apilar elementos en la pila maestra.

En caso de creación de una nueva sesión, el autómata pasa a modo de escritura. Las sesiones de ambas pilas podrán ser eliminadas simultáneamente (mediante el borrado de los separadores en ambas pilas) únicamente en modo de borrado y cuando la sesión de la pila auxiliar esté vacía. Cuando se eliminan sesiones, el autómata pasará al modo en que se encontraba antes de crear dichas sesiones.

Por convención, definimos una relación de orden entre modos, de tal modo que se cumple que $\mathbf{w} < \mathbf{e}$.

Para posibilitar el diseño de una técnica de tabulación, estableceremos una restricción adicional según la cual en los modos **w** y **e** en cada sesión de la pila auxiliar se aplicarán las mismas operaciones de apilamiento y extracción, pero en orden inverso. Para ello, cada transición de apilamiento en la pila maestra escribirá una marca de acción que indique la operación realizada sobre la pila auxiliar:

$\nearrow$ para indicar una operación de apilamiento.

$\rightarrow$ para indicar que no se ha realizado modificación alguna sobre una pila auxiliar.

$\searrow$ para indicar que se ha extraído el elemento en la cima de la pila auxiliar.

Las dos marcas de acción siguientes realizarán el papel de separadores de sesiones:

$\models^{\mathbf{w}}$ indica la creación de una nueva sesión a partir de una configuración en modo de escritura.

$\models^{\mathbf{e}}$ indica la creación de una nueva sesión a partir de una configuración en modo de borrado.

Las marcas de acción dirigirán, durante el modo de borrado, las operaciones que se pueden realizar sobre la pila auxiliar cuando se aplica una transición POP sobre la pila maestra. Puesto que las transiciones de apilamiento sobre la pila maestra escriben las marcas en el modo **w**, denominaremos $\otimes$**WRITE** a dichas transiciones. Las transiciones POP de la pila maestra son las encargadas de borrar las marcas en el modo **e**, por lo que recibirán el nombre de transiciones $\otimes$**ERASE**, donde $\otimes \in \{\models^{\mathbf{w}}, \models^{\mathbf{e}}, \nearrow, \rightarrow, \searrow\}$.

Una configuración (m, Ξ, ξ, w) del autómata vendrá determinada por el modo m en que se encuentre, el contenido Ξ de la pila maestra, el contenido ξ de la pila auxiliar y la parte w de la cadena de entrada que resta por leer.

En la nueva versión que acabamos de describir de los autómatas con dos pilas, los movimientos que se pueden realizar en un momento dado están restringidos en gran medida por movimientos realizados en algún momento anterior. Es por ello que recibirán el nombre de *autómatas con dos pilas fuertemente dirigidos* (*Strongly-Driven 2–Stack Automata*, SD–2SA).

Formalmente, definiremos un autómata con dos pilas fuertemente dirigido como una tupla $(V_T, V_S, \$_0, \$_f, V_I, \mathcal{D}, \Theta)$, donde:

- V_T es un conjunto finito de símbolos terminales.
- V_S es un conjunto finito de símbolos de la pila maestra.
- $\$_0 \in V_S$ es el símbolo inicial de la pila maestra.
- $\$_f \in V_S$ es el símbolo final de la pila maestra.
- V_I es un conjunto finito de símbolos de la pila auxiliar.
- $\mathcal{D} = \{\models^{\mathbf{w}}, \models^{\mathbf{e}}, \nearrow, \rightarrow, \searrow\}$ es el conjunto de marcas de acción.
- Θ es un conjunto finito de transiciones de los siguientes tipos:

SWAP1 : Transiciones de la forma $(m, C, \epsilon) \overset{a}{\longmapsto} (m, F, \epsilon)$, donde $m \in \{\mathbf{w}, \mathbf{e}\}$, $C, F \in V_S$ y $a \in V_T \cup \epsilon$. El resultado de aplicar una transición de este tipo a una configuración $(m, \Xi C, \xi, aw)$ es una configuración $(m, \Xi F, \xi, w)$.

SWAP2 : Transiciones de la forma $(\mathbf{w}, C, \models^m) \overset{a}{\longmapsto} (\mathbf{e}, F, \models^m)$. El resultado de aplicar una transición este tipo a una configuración $(m, \Xi C, \xi{\models^m}, aw)$ es una configuración $(m, \Xi F, \xi{\models^m}, w)$. Estas transiciones son las únicas que permiten pasar del modo de escritura al modo de borrado.

$\models$**WRITE** : Transiciones de la forma $(m, C, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{w}, C{\models^m}F, \models^m)$ que al ser aplicadas a una configuración $(m, \Xi C, \xi, w)$ producen una configuración $(\mathbf{w}, \Xi C{\models^m}F, \xi{\models^m})$.

$\rightarrow$**WRITE** Transiciones de la forma $(\mathbf{w}, C, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{w}, C{\rightarrow}F, \epsilon)$ que al ser aplicadas a una transición $(\mathbf{w}, \Xi C, \xi, w)$ producen una configuración $(\mathbf{w}, \Xi C{\rightarrow}F, \xi, w)$.

$\nearrow$**WRITE** Transiciones de la forma $(\mathbf{w}, C, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{w}, C{\nearrow}F, \gamma')$ que al ser aplicadas a una transición $(\mathbf{w}, \Xi C, \xi, w)$ producen una configuración $(\mathbf{w}, \Xi C{\nearrow}F, \xi\gamma', w)$.

$\searrow$**WRITE** Transiciones de la forma $(\mathbf{w}, C, \gamma) \longmapsto (\mathbf{w}, C{\searrow}F, \epsilon)$ que al ser aplicadas a una transición $(\mathbf{w}, \Xi C, \xi\gamma, w)$ producen una configuración $(\mathbf{w}, \Xi C{\searrow}F, \xi, w)$.

$\models$**ERASE** : Transiciones de la forma $(\mathbf{e}, C{\models^m}F, \models^m) \longmapsto (m, G, \epsilon)$ que al ser aplicadas a una configuración $(m, \Xi C{\models^m}F, \xi{\models^m}, w)$ producen una configuración $(m, \Xi G, \xi, w)$.

$\rightarrow$**ERASE** : Transiciones de la forma $(\mathbf{e}, C{\rightarrow}F, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{e}, G, \epsilon)$ que al ser aplicadas a una configuración $(\mathbf{e}, \Xi C{\rightarrow}F, \xi, w)$ producen una configuración $(\mathbf{e}, \Xi G, \xi, w)$.

$\nearrow$**ERASE** : Transiciones de la forma $(\mathbf{e}, C{\nearrow}F, \eta') \longmapsto (\mathbf{e}, G, \epsilon)$ que al ser aplicadas a una configuración $(\mathbf{e}, \Xi C{\nearrow}F, \xi\eta', w)$ producen una configuración $(\mathbf{e}, \Xi G, \xi, w)$.

$\searrow$**ERASE** : Transiciones de la forma $(\mathbf{e}, C{\searrow}F, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{e}, G, \eta)$ que al ser aplicadas a una configuración $(\mathbf{e}, \Xi C{\rightarrow}F, \xi, w)$ producen una configuración $(\mathbf{e}, \Xi G, \xi\eta, w)$.

Una *configuración* de un autómata con dos pilas fuertemente dirigido es una tupla (m, Ξ, ξ, w), donde $m \in \{\mathbf{w}, \mathbf{e}\}$, $\Xi \in (\mathcal{D}V_S)^*$, $\xi \in (\mathcal{D}V_I^*)^*$ y $w \in V_T^*$.

Una configuración (m, Ξ, ξ, aw) deriva una configuración (m', Ξ', ξ', w), denotado mediante $(m, \Xi, \xi, aw) \vdash (m', \Xi, \xi, w)$, si y sólo si existe una transición que aplicada en modo m transforma la pila maestra Ξ en Ξ' y la pila auxiliar ξ en ξ' al tiempo que lee $a \in V_T \cup \{\epsilon\}$ de la cadena de entrada, mientras el autómata pasa a modo m'. En caso de ser necesario identificar una derivación d concreta, utilizaremos la notación $\vdash_d$. Denotamos por $\overset{*}{\vdash}$ el cierre reflexivo y transitivo de $\vdash$. Decimos que una cadena de entrada w es aceptada por un autómata con dos pilas fuertemente dirigido si

$$(\mathbf{w}, \models^{\mathbf{w}} \$_0, \models^{\mathbf{w}}, w) \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e}, \models^{\mathbf{w}} \$_0 \models^{\mathbf{w}} \$_f, \models^{\mathbf{w}} \models^{\mathbf{w}}, \epsilon)$$

El lenguaje aceptado por un autómata con dos pilas fuertemente dirigido es el conjunto

$$\{w \in V_T^* \mid (\mathbf{w}, \models^{\mathbf{w}} \$_0, \models^{\mathbf{w}}, w) \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e}, \models^{\mathbf{w}} \$_0 \models^{\mathbf{w}} \$_f, \models^{\mathbf{w}} \models^{\mathbf{w}}, \epsilon)\}$$

Ejemplo 10.1 El autómata con dos pilas fuertemente dirigido de la tabla 10.1 acepta el lenguaje $\{a^n b^n c^n d^n \mid n > 0\}$. En la tabla 10.2 se muestra la derivación para la cadena de entrada $aaabbbcccddd$ en dicho autómata. La primera columna indica la transición aplicada, la segunda señala el modo del autómata en ese momento, la tercera muestra el contenido de la pila maestra, la cuarta muestra el contenido de la pila auxiliar y la quinta muestra la parte de la cadena de entrada que resta por leer. ¶

10.3.1 Esquemas de compilación de gramáticas lineales de índices

Para la compilación de las gramáticas lineales de índices en autómatas con dos pilas fuertemente dirigidos utilizaremos la pila maestra para almacenar no-terminales de la gramática y la pila auxiliar para almacenar los índices. Cada sesión corresponderá a una espina en la derivación de la gramática con respecto a la cadena de entrada. Puesto que todos los no-terminales de una espina trabajan sobre la misma pila de índices, en todo momento se cumplirá que el contenido de una sesión de la pila auxiliar se corresponderá con el valor de la pila de índices asociada al no-terminal situado en la cima de la sesión correspondiente en la pila maestra.

Podemos definir un esquema de compilación genérico mediante la parametrización de la información predicha en la fase de llamada y la información propagada en la fase de retorno. Los parámetros a considerar son:

- $\overrightarrow{A}$, que se refiere a la predicción realizada sobre el no-terminal A durante la fase descendente de la estrategia de análisis.
- $\overrightarrow{\gamma}$, que se refiere a la predicción realizada sobre el índice γ.
- $\overleftarrow{A}$, que se refiere a la propagación de información respecto al no-terminal A durante la fase ascendente de la estrategia de análisis.
- $\overleftarrow{\gamma}$, que se refiere a la propagación de información respecto al índice γ.

Esquema de compilación 10.1 El esquema de compilación genérico de una gramática lineal de índices en un autómata con dos pilas fuertemente dirigido queda definido por el conjunto de reglas mostrado en la tabla 10.3 y por los elementos inicial $\$_0$ y final $\overleftarrow{S}$. §

El esquema de compilación genérico se puede convertir en esquemas de compilación que incorporan estrategias específicas. En la tabla 10.4 se muestran los valores que toman los diferentes parámetros para las estrategias de análisis de LIG más comunes. En dicha tabla, $\Box$ indica un símbolo de pila especial que no aparece inicialmente en V_S y $\Diamond$ indica un elemento especial que no aparece inicialmente en V_I.

(a)	$(\mathbf{w}, \$_0, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{w}, \$_0 \models^{\mathbf{w}} A, \models^{\mathbf{w}})$
(b)	$(\mathbf{w}, A, \epsilon) \overset{a}{\longmapsto} (\mathbf{w}, A', \epsilon)$
(c)	$(\mathbf{w}, A', \epsilon) \longmapsto (\mathbf{w}, A' \nearrow A, \gamma)$
(d)	$(\mathbf{w}, A', \epsilon) \overset{b}{\longmapsto} (\mathbf{w}, B', \epsilon)$
(e)	$(\mathbf{w}, B', \gamma) \longmapsto (\mathbf{w}, B' \searrow B, \epsilon)$
(f)	$(\mathbf{w}, B, \epsilon) \overset{b}{\longmapsto} (\mathbf{w}, B', \epsilon)$
(g)	$(\mathbf{w}, B', \models^{m}) \overset{c}{\longmapsto} (\mathbf{e}, C', \models^{m})$
(h)	$(\mathbf{e}, B' \searrow C', \epsilon) \longmapsto (\mathbf{e}, C, \eta)$
(i)	$(\mathbf{e}, C, \epsilon) \overset{c}{\longmapsto} (\mathbf{e}, C', \epsilon)$
(j)	$(\mathbf{e}, C', \epsilon) \overset{d}{\longmapsto} (\mathbf{e}, D', \epsilon)$
(k)	$(\mathbf{e}, A' \nearrow D') \longmapsto (\mathbf{e}, D, \epsilon)$
(l)	$(\mathbf{e}, D, \epsilon) \overset{d}{\longmapsto} (\mathbf{e}, D', \epsilon)$
(m)	$(\mathbf{e}, D', \epsilon) \longmapsto (\mathbf{e}, \$_f, \epsilon)$

Tabla 10.1: Transiciones del SD–2SA que acepta $\{a^n b^n c^n d^n \mid n > 0\}$

	$\mathbf{w}$	$\models^{\mathbf{w}} \$_0$	$\models^{\mathbf{w}}$	$aaabbbcccddd$
(a)	$\mathbf{w}$	$\models^{\mathbf{w}} \$_0 \ \models^{\mathbf{w}} A$	$\models^{\mathbf{w}} \models^{\mathbf{w}}$	$aaabbbcccddd$
(b)	$\mathbf{w}$	$\models^{\mathbf{w}} \$_0 \ \models^{\mathbf{w}} A'$	$\models^{\mathbf{w}} \models^{\mathbf{w}}$	$aabbbcccddd$
(c)	$\mathbf{w}$	$\models^{\mathbf{w}} \$_0 \ \models^{\mathbf{w}} A' \nearrow A$	$\models^{\mathbf{w}} \models^{\mathbf{w}} \gamma$	$aabbbcccddd$
(b)	$\mathbf{w}$	$\models^{\mathbf{w}} \$_0 \ \models^{\mathbf{w}} A' \nearrow A'$	$\models^{\mathbf{w}} \models^{\mathbf{w}} \gamma$	$abbbcccddd$
(c)	$\mathbf{w}$	$\models^{\mathbf{w}} \$_0 \ \models^{\mathbf{w}} A' \nearrow A' \nearrow A$	$\models^{\mathbf{w}} \models^{\mathbf{w}} \gamma\,\gamma$	$abbbcccddd$
(b)	$\mathbf{w}$	$\models^{\mathbf{w}} \$_0 \ \models^{\mathbf{w}} A' \nearrow A' \nearrow A'$	$\models^{\mathbf{w}} \models^{\mathbf{w}} \gamma\,\gamma$	$bbbcccddd$
(d)	$\mathbf{w}$	$\models^{\mathbf{w}} \$_0 \ \models^{\mathbf{w}} A' \nearrow A' \nearrow B'$	$\models^{\mathbf{w}} \models^{\mathbf{w}} \gamma\,\gamma$	$bbcccddd$
(e)	$\mathbf{w}$	$\models^{\mathbf{w}} \$_0 \ \models^{\mathbf{w}} A' \nearrow A' \nearrow B' \searrow B$	$\models^{\mathbf{w}} \models^{\mathbf{w}} \gamma$	$bbcccddd$
(f)	$\mathbf{w}$	$\models^{\mathbf{w}} \$_0 \ \models^{\mathbf{w}} A' \nearrow A' \nearrow B' \searrow B'$	$\models^{\mathbf{w}} \models^{\mathbf{w}} \gamma$	$bcccddd$
(e)	$\mathbf{w}$	$\models^{\mathbf{w}} \$_0 \ \models^{\mathbf{w}} A' \nearrow A' \nearrow B' \searrow B' \searrow B$	$\models^{\mathbf{w}} \models^{\mathbf{w}}$	$bcccddd$
(f)	$\mathbf{w}$	$\models^{\mathbf{w}} \$_0 \ \models^{\mathbf{w}} A' \nearrow A' \nearrow B' \searrow B' \searrow B'$	$\models^{\mathbf{w}} \models^{\mathbf{w}}$	$cccddd$
(g)	$\mathbf{e}$	$\models^{\mathbf{w}} \$_0 \ \models^{\mathbf{w}} A' \nearrow A' \nearrow B' \searrow B' \searrow C'$	$\models^{\mathbf{w}} \models^{\mathbf{w}}$	$ccddd$
(h)	$\mathbf{e}$	$\models^{\mathbf{w}} \$_0 \ \models^{\mathbf{w}} A' \nearrow A' \nearrow B' \searrow C$	$\models^{\mathbf{w}} \models^{\mathbf{w}} \eta$	$ccddd$
(i)	$\mathbf{e}$	$\models^{\mathbf{w}} \$_0 \ \models^{\mathbf{w}} A' \nearrow A' \nearrow B' \searrow C'$	$\models^{\mathbf{w}} \models^{\mathbf{w}} \eta$	$cddd$
(h)	$\mathbf{e}$	$\models^{\mathbf{w}} \$_0 \ \models^{\mathbf{w}} A' \nearrow A' \nearrow C$	$\models^{\mathbf{w}} \models^{\mathbf{w}} \eta\,\eta$	$cddd$
(i)	$\mathbf{e}$	$\models^{\mathbf{w}} \$_0 \ \models^{\mathbf{w}} A' \nearrow A' \nearrow C'$	$\models^{\mathbf{w}} \models^{\mathbf{w}} \eta\,\eta$	ddd
(j)	$\mathbf{e}$	$\models^{\mathbf{w}} \$_0 \ \models^{\mathbf{w}} A' \nearrow A' \nearrow D'$	$\models^{\mathbf{w}} \models^{\mathbf{w}} \eta\,\eta$	dd
(k)	$\mathbf{e}$	$\models^{\mathbf{w}} \$_0 \ \models^{\mathbf{w}} A' \nearrow D$	$\models^{\mathbf{w}} \models^{\mathbf{w}} \eta$	dd
(l)	$\mathbf{e}$	$\models^{\mathbf{w}} \$_0 \ \models^{\mathbf{w}} A' \nearrow D'$	$\models^{\mathbf{w}} \models^{\mathbf{w}} \eta$	d
(k)	$\mathbf{e}$	$\models^{\mathbf{w}} \$_0 \ \models^{\mathbf{w}} D$	$\models^{\mathbf{w}} \models^{\mathbf{w}}$	d
(l)	$\mathbf{e}$	$\models^{\mathbf{w}} \$_0 \ \models^{\mathbf{w}} D'$	$\models^{\mathbf{w}} \models^{\mathbf{w}}$	
(m)	$\mathbf{e}$	$\models^{\mathbf{w}} \$_0 \ \models^{\mathbf{w}} \$_f$	$\models^{\mathbf{w}} \models^{\mathbf{w}}$	

Tabla 10.2: Configuraciones del SD–2SA para la cadena de entrada $aaabbbcccddd$

[INIT]	$(\mathbf{w}, \$_0, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{w}, \$_0 \models^{\mathbf{w}} \nabla_{0,0}, \models^{\mathbf{w}})$	
[CALL]	$(m, \nabla_{r,s}, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{w}, \nabla_{r,s} \models^m \overrightarrow{A_{r,s+1}}, \models^m)$	$A_{r,0}[\circ\circ\gamma] \to \Upsilon_1 A_{r,s+1}[\,]\Upsilon_2$
[SCALL-1]	$(\mathbf{w}, \nabla_{r,s}, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{w}, \nabla_{r,s} \rightarrow \overrightarrow{A_{r,s+1}}, \epsilon)$	$A_{r,0}[\circ\circ] \to \Upsilon_1 A_{r,s+1}[\circ\circ]\Upsilon_2$
[SCALL-2]	$(\mathbf{w}, \nabla_{r,s}, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{w}, \nabla_{r,s} \nearrow \overrightarrow{A_{r,s+1}}, \overrightarrow{\gamma'})$	$A_{r,0}[\circ\circ] \to \Upsilon_1 A_{r,s+1}[\circ\circ\gamma']\Upsilon_2$
[SCALL-3]	$(\mathbf{w}, \nabla_{r,s}, \overrightarrow{\gamma}) \longmapsto (\mathbf{w}, \nabla_{r,s} \searrow \overrightarrow{A_{r,s+1}}, \epsilon)$	$A_{r,0}[\circ\circ\gamma] \to \Upsilon_1 A_{r,s+1}[\circ\circ]\Upsilon_2$
[SEL]	$(\mathbf{w}, \overrightarrow{A_{r,0}}, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{w}, \nabla_{r,0}, \epsilon)$	$r \neq 0$
[PUB]	$(\mathbf{e}, \nabla_{r,n_r}, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{e}, \overleftarrow{A_{r,0}}, \epsilon)$	
[RET]	$(\mathbf{e}, \nabla_{r,s} \models^m \overleftarrow{A_{r,s+1}}, \models^m) \longmapsto (m, \nabla_{r,s+1}, \epsilon)$	$A_{r,0}[\circ\circ\gamma] \to \Upsilon_1 A_{r,s+1}[\,]\Upsilon_2$
[SRET-1]	$(\mathbf{e}, \nabla_{r,s} \rightarrow \overleftarrow{A_{r,s+1}}, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{e}, \nabla_{r,s+1}, \epsilon)$	$A_{r,0}[\circ\circ] \to \Upsilon_1 A_{r,s+1}[\circ\circ]\Upsilon_2$
[SRET-2]	$(\mathbf{e}, \nabla_{r,s} \nearrow \overleftarrow{A_{r,s+1}}, \overleftarrow{\gamma'}) \longmapsto (\mathbf{e}, \nabla_{r,s+1}, \epsilon)$	$A_{r,0}[\circ\circ] \to \Upsilon_1 A_{r,s+1}[\circ\circ\gamma']\Upsilon_2$
[SRET-3]	$(\mathbf{e}, \nabla_{r,s} \searrow \overleftarrow{A_{r,s+1}}, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{e}, \nabla_{r,s+1}, \overleftarrow{\gamma})$	$A_{r,0}[\circ\circ\gamma] \to \Upsilon_1 A_{r,s+1}[\circ\circ]\Upsilon_2$
[SCAN]	$(\mathbf{w}, \overrightarrow{A_{r,0}}, \models^m) \overset{a}{\longmapsto} (\mathbf{e}, \overleftarrow{A_{r,0}}, \models^m)$	$A_{r,0}[\,] \to a$

Tabla 10.3: Reglas del esquema de compilación genérico de LIG en SD–2SA

estrategia-CF	**estrategia-índices**	$\overrightarrow{A_{r,s+1}}$	$\overrightarrow{\gamma'}$	$\overleftarrow{A_{r,s+1}}$	$\overleftarrow{\gamma}$
Ascendente		$\square$	$\diamond$	$A_{r,s+1}$	γ
Earley	ascendente	$\overline{A_{r,s+1}}$	$\diamond$	$\overline{\overline{A_{r,s+1}}}$	γ
Descendente		$A_{r,s+1}$	$\diamond$	$\square$	γ
Ascendente		$\square$	γ	$A_{r,s+1}$	γ
Earley	Earley	$\overline{A_{r,s+1}}$	γ	$\overline{\overline{A_{r,s+1}}}$	γ
Descendente		$A_{r,s+1}$	γ	$\square$	γ
Ascendente		$\square$	γ	$A_{r,s+1}$	$\diamond$
Earley	descendente	$\overline{A_{r,s+1}}$	γ	$\overline{\overline{A_{r,s+1}}}$	$\diamond$
Descendente		$A_{r,s+1}$	γ	$\square$	$\diamond$

Tabla 10.4: Parámetros del esquema de compilación genérico de LIG en SD–2SA

10.3.2 Esquemas de compilación de gramáticas de adjunción de árboles

Para la compilación de gramáticas de adjunción de árboles en autómatas con dos pilas fuertemente dirigidos haremos uso de la pila maestra para almacenar los nodos de los árboles elementales según se van visitando. La pila auxiliar se utilizará para almacenar la pila de adjunciones pendiente en cada nodo, de tal modo que los valores almacenados en una sesión de la pila auxiliar se corresponden con la pila de adjunciones pendientes del nodo situado en la cima de la sesión correspondiente en la pila maestra.

Podemos definir un esquema de compilación genérico mediante la parametrización del flujo de información de las fases de llamada y retorno. Los parámetros a considerar son:

- $\overrightarrow{N^{\gamma}_{r,s}}$, la información predicha acerca del nodo $N^{\gamma}_{r,s}$.
- $\overleftarrow{N^{\gamma}_{r,s}}$, la información propagada acerca del nodo $N^{\gamma}_{r,s}$.

Esquema de compilación 10.2 El esquema de compilación genérico de una gramática de adjunción de árboles en un autómata con dos pilas fuertemente dirigido queda definido por el conjunto de reglas mostrado en la tabla 10.5 y los elementos inicial $\$_0$ y final $\overleftarrow{\top^{\alpha}}$, con $\alpha \in \boldsymbol{I}$.

En este esquema de análisis sintáctico el cambio de modo de escritura a modo de borrado se produce, además de en las transiciones producidas por la regla de compilación **[SCAN]**, en las transiciones producidas por la regla de compilación **[PUB2]**. Ello se debe a que en las producciones de los árboles iniciales no son aplicables las reglas **[SCALL]** y **[SRET]**, por lo cual todo cambio de modo realizado por una regla **[SCAN]** es eliminado por una regla **[RET]**. §

El esquema de compilación genérico puede convertirse en esquemas de compilación para diferentes estrategias de análisis según los valores que tomen los parámetros con respecto a su ubicación en las pilas maestra y auxiliar, tal y como se indica en la tabla 10.6.

10.3.3 SD–2SA y los lenguajes de adjunción de árboles

Los lenguajes aceptados por los autómatas con dos pilas fuertemente dirigidos coinciden con los lenguajes de adjunción de árboles. Para demostrar esta aseveración definiremos y demostraremos los dos teoremas siguientes.

Teorema 10.3 *Los lenguajes adjunción de árboles son un subconjunto de los lenguajes aceptados por la clase de los autómatas con dos pilas fuertemente dirigidos.*

Demostración:

Por el esquema de compilación de TAG en SD–2SA presentado anteriormente, a partir de cualquier gramática de adjunción de árboles es posible construir un SD–2SA que acepta el lenguaje reconocido por dicha gramática. Análogamente, por el esquema de compilación de LIG en SD–2SA, a partir de cualquier gramática lineal de índices es posible construir un SD–2SA que acepta el lenguaje reconocido por dicha gramática. □

Teorema 10.4 *La clase de los lenguajes aceptados por los autómatas con dos pilas fuertemente dirigidos es un subconjunto de los lenguajes de adjunción de árboles.*

[INIT]	$(\mathbf{w}, \$_0, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{w}, \$_0 \models^{\mathbf{w}} \nabla^{\alpha}_{0,0}, \models^{\mathbf{w}})$	$\alpha \in \boldsymbol{I}$
[CALL]	$(m, \nabla^{\gamma}_{r,s}, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{w}, \nabla^{\gamma}_{r,s} \models^{m} \overrightarrow{N^{\gamma}_{r,s+1}}, \models^{m})$	$N^{\gamma}_{r,s+1} \not\in \text{espina}(\gamma)$, $\mathbf{nil} \in \text{adj}(N_{r,s+1})$
[SCALL]	$(\mathbf{w}, \nabla^{\gamma}_{r,s}, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{w}, \nabla^{\gamma}_{r,s} \rightarrow \overrightarrow{N^{\gamma}_{r,s+1}}, \epsilon)$	$N^{\gamma}_{r,s+1} \in \text{espina}(\gamma)$, $\mathbf{nil} \in \text{adj}(N_{r,s+1})$
[SEL]	$(\mathbf{w}, \overrightarrow{N^{\gamma}_{r,0}}, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{w}, \nabla^{\gamma}_{r,0}, \epsilon)$	$r \neq 0$
[PUB1]	$(\mathbf{e}, \nabla^{\gamma}_{r,n_r}, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{e}, \overleftarrow{N^{\gamma}_{r,0}}, \epsilon)$	
[PUB2]	$(\mathbf{w}, \nabla^{\gamma}_{r,n_r}, \models^{m}) \longmapsto (\mathbf{e}, \overleftarrow{N^{\gamma}_{r,0}}, \models^{m})$	
[RET]	$(\mathbf{e}, \nabla^{\gamma}_{r,s} \models^{m} \overleftarrow{N^{\gamma}_{r,s+1}}, \models^{m}) \longmapsto (m, \nabla^{\gamma}_{r,s+1}, \epsilon)$	$N^{\gamma}_{r,s+1} \not\in \text{espina}(\gamma)$, $\mathbf{nil} \in \text{adj}(N_{r,s+1})$
[SRET]	$(\mathbf{e}, \nabla^{\gamma}_{r,s} \rightarrow \overleftarrow{N^{\gamma}_{r,s+1}}, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{e}, \nabla^{\gamma}_{r,s+1}, \epsilon)$	$N^{\gamma}_{r,s+1} \in \text{espina}(\gamma)$, $\mathbf{nil} \in \text{adj}(N_{r,s+1})$
[SCAN]	$(\mathbf{w}, \overrightarrow{N^{\gamma}_{r,0}}, \models^{m}) \overset{a}{\longmapsto} (\mathbf{e}, \overleftarrow{N^{\gamma}_{r,0}}, \models^{m})$	$N^{\gamma}_{r,0}[\,] \rightarrow a$
[ACALL]	$(\mathbf{w}, \nabla^{\gamma}_{r,s}, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{w}, \nabla^{\gamma}_{r,s} \nearrow \overrightarrow{\top^{\beta}}, \overrightarrow{N^{\gamma}_{r,s+1}})$	$\beta \in \text{adj}(N^{\gamma}_{r,s+1})$
[ARET]	$(\mathbf{e}, \nabla^{\gamma}_{r,s} \nearrow \overleftarrow{\top^{\beta}}, \overleftarrow{N^{\gamma}_{r,s+1}}) \longmapsto (\mathbf{e}, \nabla^{\gamma}_{r,s+1}, \epsilon)$	$\beta \in \text{adj}(N^{\gamma}_{r,s+1})$
[FCALL]	$(\mathbf{w}, \nabla^{\beta}_{f,0}, \overrightarrow{N^{\gamma}_{r,s+1}}) \longmapsto (\mathbf{w}, \nabla^{\beta}_{f,0} \searrow \overrightarrow{N^{\gamma}_{r,s+1}}, \epsilon)$	$N^{\beta}_{f,0} = \mathbf{F}^{\beta}$, $\beta \in \text{adj}(N^{\gamma}_{r,s+1})$
[FRET]	$(\mathbf{w}, \nabla^{\beta}_{f,0} \searrow \overleftarrow{N^{\gamma}_{r,s+1}}, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{e}, \nabla^{\beta}_{f,1}, \overleftarrow{N^{\gamma}_{r,s+1}})$	$N^{\beta}_{f,0} = \mathbf{F}^{\beta}$, $\beta \in \text{adj}(N^{\gamma}_{t,s+1})$

Tabla 10.5: Reglas del esquema de compilación genérico de TAG en SD–2SA

Estrategia-CF	**Estrategia-adjunción**	**MS** $\overrightarrow{N^{\gamma}_{r,s+1}}$	**AS** $\overrightarrow{N^{\gamma}_{r,s+1}}$	**MS** $\overleftarrow{N^{\gamma}_{r,s+1}}$	**AS** $\overleftarrow{N^{\gamma}_{r,s+1}}$
Ascendente	ascendente	$\square$	$\diamond$	$N^{\gamma}_{r,s+1}$	$N^{\gamma}_{r,s+1}$
Earley		$\overline{N^{\gamma}_{r,s+1}}$	$\diamond$	$\overline{\overline{N^{\gamma}_{r,s+1}}}$	$N^{\gamma}_{r,s+1}$
Descendente		$N^{\gamma}_{r,s+1}$	$\diamond$	$\square$	$N^{\gamma}_{r,s+1}$
Ascendente	Earley	$\square$	$N^{\gamma}_{r,s+1}$	$N^{\gamma}_{r,s+1}$	$N^{\gamma}_{r,s+1}$
Earley		$\overline{N^{\gamma}_{r,s+1}}$	$N^{\gamma}_{r,s+1}$	$\overline{\overline{N^{\gamma}_{r,s+1}}}$	$N^{\gamma}_{r,s+1}$
Descendente		$N^{\gamma}_{r,s+1}$	$N^{\gamma}_{r,s+1}$	$\square$	$N^{\gamma}_{r,s+1}$
Ascendente	descendente	$\square$	$N^{\gamma}_{r,s+1}$	$N^{\gamma}_{r,s+1}$	$\diamond$
Earley		$\overline{N^{\gamma}_{r,s+1}}$	$N^{\gamma}_{r,s+1}$	$\overline{\overline{N^{\gamma}_{r,s+1}}}$	$\diamond$
Descendente		$N^{\gamma}_{r,s+1}$	$N^{\gamma}_{r,s+1}$	$\square$	$\diamond$

Tabla 10.6: Parámetros del esquema de compilación genérico de TAG en SD–2SA

Demostración:

Mostraremos que para todo SD–2SA existe una gramática lineal de índices tal que el lenguaje reconocido por la gramática coincide con el lenguaje aceptado por el autómata.

Sea $\mathcal{A} = (V_T, V_S, \$_0, \$_f, V_I, \mathcal{D}, \Theta)$ un autómata lineal de índices fuertemente dirigido. Construiremos una gramática lineal de índices $\mathcal{L} = (V_T, V_N, V_I', S, P)$. El conjunto V_N de no-terminales estará formado por pares $\langle E, B \rangle$ tal que $A, B \in V_S^{\mathcal{D}}$, donde $V_S^{\mathcal{D}} = \{E^m \mid E \in V_S,\ m \in \mathcal{D}\}$. El conjunto V_I' estará formado por pares $\langle \gamma, \eta \rangle$ tal que $\gamma, \eta \in V_I$. Para que $\mathcal{L}$ reconozca el lenguaje aceptado por $\mathcal{A}$ el conjunto de producciones en P ha de construirse a partir de las transiciones en Θ de la siguiente manera:

- Para toda transición $(m, C, \epsilon) \overset{a}{\longmapsto} (m, F, \epsilon)$ y para todo $E^{m'} \in V_S^{\mathcal{D}}$ tal que $m' \leq m$ creamos una producción

$$\langle E^{m'}, F^m \rangle[\circ\circ] \to \langle E^{m'}, C^m \rangle[\circ\circ]\ a$$

- Para toda transición $(\mathbf{w}, C, \models^m) \overset{a}{\longmapsto} (\mathbf{e}, F, \models^m)$ y para todo $E^{\mathbf{w}} \in V_S^{\mathcal{D}}$ creamos la producción

$$\langle E^{\mathbf{w}}, F^{\mathbf{e}} \rangle[\,] \to \langle E^{\mathbf{w}}, C^{\mathbf{w}} \rangle[\,]\ a$$

- Para todo par de transiciones $(\mathbf{e}, C{\models^m}F, \models^m) \longmapsto (m, G, \epsilon)$ y $(m, C, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{w}, C{\models^m}F', \models^m)$, y para todo $E^{m''} \in V_S^{\mathcal{D}}$ tal que $m'' \leq m$ creamos una producción

$$\langle E^{m''}, G^m \rangle[\circ\circ] \to \langle E^{m''}, C^m \rangle[\circ\circ]\ \ \langle F'^{\mathbf{w}}, F^{\mathbf{e}} \rangle[\,]$$

- Para todo par de transiciones $(\mathbf{e}, C{\rightarrow}F, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{e}, G, \epsilon)$ y $(\mathbf{w}, C, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{w}, C{\rightarrow}F', \epsilon)$, y para todo $E^{\mathbf{w}} \in V_S^{\mathcal{D}}$ creamos una producción

$$\langle E^{\mathbf{w}}, G^{\mathbf{e}} \rangle[\circ\circ] \to \langle E^{\mathbf{w}}, C^{\mathbf{w}} \rangle[\,]\ \ \langle F'^{\mathbf{w}}, F^{\mathbf{e}} \rangle[\circ\circ]$$

- Para todo par de transiciones $(\mathbf{e}, C{\nearrow}F, \eta') \longmapsto (\mathbf{e}, G, \epsilon)$ y $(\mathbf{w}, C, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{w}, C{\nearrow}F', \gamma')$, y para todo $E^{\mathbf{w}} \in V_S^{\mathcal{D}}$ creamos una producción

$$\langle E^{\mathbf{w}}, G^{\mathbf{e}} \rangle[\circ\circ] \to \langle E^{\mathbf{w}}, C^{\mathbf{w}} \rangle[\,]\ \ \langle F'^{\mathbf{w}}, F^{\mathbf{e}} \rangle[\circ\circ\langle \gamma', \eta' \rangle]$$

- Para todo par de transiciones $(\mathbf{e}, C{\searrow}F, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{e}, G, \eta)$ y $(\mathbf{w}, C, \gamma) \longmapsto (\mathbf{w}, C{\searrow}F', \epsilon)$, y para todo $E^{\mathbf{w}} \in V_S^{\mathcal{D}}$ creamos una producción

$$\langle E^{\mathbf{w}}, G^{\mathbf{e}} \rangle[\circ\circ\langle \gamma, \eta \rangle] \to \langle E^{\mathbf{w}}, C^{\mathbf{w}} \rangle[\,]\ \ \langle F'^{\mathbf{w}}, F^{\mathbf{e}} \rangle[\circ\circ]$$

- Para todo $E^m \in V_S^{\mathcal{D}}$ creamos una producción

$$\langle E^m, E^m \rangle[\,] \to \epsilon$$

- Para toda transición $(\mathbf{w}, \$_0, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{w}, \$_0{\models^m}F, \models^m)$, donde $F \in V_S - \{\$_0\}$, creamos una producción

$$\langle \$_0^{\mathbf{w}}, \$_0^{\mathbf{w}} \rangle[\circ\circ] \to \langle F^{\mathbf{w}}, \$_f^{\mathbf{e}} \rangle[\circ\circ]$$

Con respecto al axioma de la gramática, tenemos que $S = \langle \$_0^{\mathbf{w}}, \$_0^{\mathbf{w}} \rangle$.

Dividiremos la demostración en tres casos, cada uno correspondiente a un tipo específico de derivación. Tratamos a continuación cada uno de los casos por separado.

Caso 1. Existe una derivación en el autómata $(\mathbf{w}, E, \xi_1, w) \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w}, C, \xi_1, \epsilon)$ para algún $\xi_1 \in V_I^*$, en la que sólo se han aplicado transiciones de tipo **SWAP1**, si y sólo si existe una derivación en la gramática $\langle E^{\mathbf{w}}, C^{\mathbf{w}} \rangle[\,] \overset{*}{\Rightarrow} w$. La demostración se realiza por inducción. El caso base lo constituyen los dos casos siguientes:

- Si $(\mathbf{w}, E, \xi_1, \epsilon) \overset{0}{\vdash} (\mathbf{w}, E, \xi_1, \epsilon)$ entonces existe una producción $\langle E^{\mathbf{w}}, E^{\mathbf{w}} \rangle[\,] \rightarrow \epsilon$, por lo que $\langle E^{\mathbf{w}}, E^{\mathbf{w}} \rangle[\,] \overset{*}{\Rightarrow} \epsilon$.
- Si $\langle E^{\mathbf{w}}, E^{\mathbf{w}} \rangle[\,] \rightarrow \epsilon$ entonces existe una derivación $(\mathbf{w}, E, \xi_1, \epsilon) \overset{0}{\vdash} (\mathbf{w}, E, \xi_1, \epsilon)$ en el autómata.

Por hipótesis de inducción suponemos que se cumple para toda derivación de longitud inferior a s. El paso de inducción contempla los dos casos siguientes:

- Si $(\mathbf{w}, E, \xi_1, wa) \overset{s}{\vdash} (\mathbf{w}, C, \xi_1, a) \vdash (\mathbf{w}, F, \xi_1, \epsilon)$, entonces existe una producción $\langle E^{\mathbf{w}}, F^{\mathbf{w}} \rangle[\circ\circ] \rightarrow \langle E^{\mathbf{w}}, C^{\mathbf{w}} \rangle[\circ\circ]\, a$, por hipótesis de inducción tenemos que $\langle E^{\mathbf{w}}, C^{\mathbf{w}} \rangle[\,] \overset{*}{\Rightarrow} w$, por lo que $\langle E^{\mathbf{w}}, F^{\mathbf{w}} \rangle[\,] \overset{*}{\Rightarrow} wa$.
- Si $\langle E^{\mathbf{w}}, F^{\mathbf{w}} \rangle[\,] \Rightarrow \langle E^{\mathbf{w}}, C^{\mathbf{w}} \rangle[\,]\, a \overset{s}{\Rightarrow} wa$, entonces existe una transición $(\mathbf{w}, C, \epsilon) \overset{a}{\longmapsto} (\mathbf{w}, F, \epsilon)$, por hipótesis de inducción $(\mathbf{w}, E, \xi_1, w) \overset{s}{\vdash} (\mathbf{w}, C, \xi_1, \epsilon)$ para algún ξ_1 y en consecuencia $(\mathbf{w}, E, \xi_1, wa) \overset{s}{\vdash} (\mathbf{w}, F, \xi_1, \epsilon)$.

Caso 2. Existe una derivaci'on del autómata

$$\begin{array}{ll}(\mathbf{w}, \Xi\, E, \xi_1, w_1 w_2) & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w}, \Xi\, C, \xi_1, w_2) \\ & \vdash (\mathbf{w}, \Xi\, C {\models^{\mathbf{w}}} F', \xi_1 {\models^{\mathbf{w}}}, w_2) \\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e}, \Xi\, C {\models^{\mathbf{w}}} F, \xi_1 {\models^{\mathbf{w}}}, \epsilon) \\ & \vdash (\mathbf{w}, \Xi\, G, \xi_1, \epsilon)\end{array}$$

si y sólo si $\langle E^{\mathbf{w}}, G^{\mathbf{w}} \rangle[\,] \overset{*}{\Rightarrow} w_1 w_2$. La demostración se obtiene directamente a partir del caso 1 y de la existencia de una producción $\langle E^{\mathbf{w}}, G^{\mathbf{w}} \rangle[\circ\circ] \rightarrow \langle E^{\mathbf{w}}, C^{\mathbf{w}} \rangle[\circ\circ]\, \langle F'^{\mathbf{w}}, F^{\mathbf{e}} \rangle[\,]$.

Caso 3. El caso principal de esta demostración establece que $\langle E^{\mathbf{w}}, C^{\mathbf{e}} \rangle[\alpha] \overset{*}{\Rightarrow} w$ si y sólo si $(\mathbf{w}, E, \xi, w) \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e}, C, \phi, \epsilon)$ y se cumple que $\xi = \gamma_1\gamma_2 \ldots \gamma_p$, $\phi = \eta_1\eta_2 \ldots \eta_p$ y $\alpha = \langle\gamma_1, \eta_1\rangle\langle\gamma_2, \eta_2\rangle \ldots \langle\gamma_p, \eta_p\rangle$, esto es, ξ es la pila obtenida como resultado de la proyección del primer componente de los elementos almacenados en α mientras que ϕ es la pila obtenida como resultado de la proyección del segundo componente de los elementos almacenados en la pila de índices α. Tratamos a continuación de demostrar cada una de las direcciones de la implicación:

- Si una derivación $(\mathbf{w}, E, \xi, w) \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e}, C, \phi, \epsilon)$ es el resultado de aplicar la secuencia $t_1, \ldots, t_s$ de transiciones en Θ, entonces existe una secuencia $p_1, \ldots, p'_s$ de producciones en P tal que la derivación $\langle E^{\mathbf{w}}, C^{\mathbf{e}} \rangle[\alpha] \overset{*}{\Rightarrow} w$ resultado de aplicar $p_1, \ldots, p'_s$ reconoce w. La demostración se realiza por inducción en la longitud de la derivación del autómata.

  El caso base lo constituye la derivación $(\mathbf{w}, E, \models^m, \epsilon) \vdash (\mathbf{e}, C, \models^m, \epsilon)$, para la que existe la producción $\langle E^{\mathbf{w}}, C^{\mathbf{e}} \rangle[\,] \rightarrow \langle E^{\mathbf{w}}, E^{\mathbf{w}} \rangle[\,]\, a$ y la producción $\langle E^{\mathbf{w}}, E^{\mathbf{w}} \rangle[\,] \rightarrow \epsilon$, por lo que $\langle E^{\mathbf{w}}, C^{\mathbf{e}} \rangle[\,] \overset{*}{\Rightarrow} a$.

  Por hipótesis de inducción suponemos que la proposición se cumple para cualquier derivación del autómata de longitud s. En tal caso, durante el paso de inducción verificamos que se cumple para cualquier posible derivación de longitud mayor que s:

  - Si $(\mathbf{w}, E, \xi, wa) \overset{s}{\vdash} (\mathbf{e}, C, \phi, a) \vdash (\mathbf{e}, F, \phi, \epsilon)$, existe una producción $\langle E^{\mathbf{w}}, F^{\mathbf{e}} \rangle[\circ\circ] \rightarrow \langle E^{\mathbf{w}}, C^{\mathbf{e}} \rangle[\circ\circ]\, a$, por hipótesis de inducción se cumple que $\langle E^{\mathbf{w}}, C^{\mathbf{e}} \rangle[\alpha] \overset{*}{\Rightarrow} w$, y en consecuencia $\langle E^{\mathbf{w}}, F^{\mathbf{e}} \rangle[\alpha] \overset{*}{\Rightarrow} wa$.
  - Si $(\mathbf{w}, E, \xi, w_1 w_2) \overset{s_1}{\vdash} (\mathbf{e}, C, \phi, w_2) \vdash (\mathbf{w}, C {\models^{\mathbf{e}}} F', \phi {\models^{\mathbf{e}}}, w_2) \overset{s_2}{\vdash} (\mathbf{e}, C {\models^{\mathbf{e}}} F, \phi {\models^{\mathbf{e}}}, \epsilon) \vdash (\mathbf{e}, G, \phi, \epsilon)$, existe una producción $\langle E^{\mathbf{w}}, G^{\mathbf{e}} \rangle[\circ\circ] \rightarrow \langle E^{\mathbf{w}}, C^{\mathbf{e}} \rangle[\circ\circ]\, \langle F'^{\mathbf{w}}, F^{\mathbf{e}} \rangle[\,]$, por hipótesis de inducción se cumple que $\langle E^{\mathbf{w}}, C^{\mathbf{e}} \rangle[\alpha] \overset{*}{\Rightarrow} w_1$ y $\langle F'^{\mathbf{w}}, F^{\mathbf{e}} \rangle[\,] \overset{*}{\Rightarrow} w_2$, y en consecuencia $\langle E^{\mathbf{w}}, G^{\mathbf{e}} \rangle[\alpha] \overset{*}{\Rightarrow} w_1 w_2$.

- Si $(\mathbf{w}, E, \xi, w_1 w_2) \overset{s_1}{\vdash} (\mathbf{w}, C, \xi, w_2) \vdash (\mathbf{w}, C{\rightarrow}F', \phi, w_2) \overset{s_2}{\vdash} (\mathbf{e}, C{\rightarrow}F, \phi, \epsilon) \vdash (\mathbf{e}, G, \phi, \epsilon)$, existe una producción $\langle E^{\mathbf{w}}, G^{\mathbf{e}}\rangle[\circ\circ] \rightarrow \langle E^{\mathbf{w}}, C^{\mathbf{w}}\rangle[\,]\ \langle F'^{\mathbf{w}}, F^{\mathbf{e}}\rangle[\circ\circ]$, por los casos 1 y 2 se cumple que $\langle E^{\mathbf{w}}, C^{\mathbf{w}}\rangle[\ ] \overset{*}{\Rightarrow} w_1$ y $\langle F'^{\mathbf{w}}, F^{\mathbf{e}}\rangle[\ ] \overset{*}{\Rightarrow} w_2$, y en consecuencia $\langle E^{\mathbf{w}}, G^{\mathbf{e}}\rangle[\alpha] \overset{*}{\Rightarrow} w_1 w_2$.
- Si $(\mathbf{w}, E, \xi, w_1 w_2) \overset{s_1}{\vdash} (\mathbf{w}, C, \xi, w_2) \vdash (\mathbf{w}, C{\nearrow}F', \phi\gamma', w_2) \overset{s_2}{\vdash} (\mathbf{e}, C{\nearrow}F, \phi\eta', \epsilon) \vdash (\mathbf{e}, G, \phi, \epsilon)$, existe una producción $\langle E^{\mathbf{w}}, G^{\mathbf{e}}\rangle[\circ\circ] \rightarrow \langle E^{\mathbf{w}}, C^{\mathbf{w}}\rangle[\,]\ \langle F'^{\mathbf{w}}, F^{\mathbf{e}}\rangle[\circ\circ\langle\gamma', \eta'\rangle]$, por los casos 1 y 2 se cumple que $\langle E^{\mathbf{w}}, C^{\mathbf{w}}\rangle[\ ] \overset{*}{\Rightarrow} w_1$ y $\langle F'^{\mathbf{w}}, F^{\mathbf{e}}\rangle[\alpha\langle\gamma', \eta\rangle] \overset{*}{\Rightarrow} w_2$, y en consecuencia $\langle E^{\mathbf{w}}, G^{\mathbf{e}}\rangle[\alpha] \overset{*}{\Rightarrow} w_1 w_2$.
- Si $(\mathbf{w}, E, \xi\gamma, w_1 w_2) \overset{s_1}{\vdash} (\mathbf{w}, C, \xi, w_2) \vdash (\mathbf{w}, C{\searrow}F', \phi, w_2) \overset{s_2}{\vdash} (\mathbf{e}, C{\searrow}F, \phi, \epsilon) \vdash (\mathbf{e}, G, \phi\eta, \epsilon)$, existe una producción $\langle E^{\mathbf{w}}, G^{\mathbf{e}}\rangle[\circ\circ\langle\gamma, \eta\rangle] \rightarrow \langle E^{\mathbf{w}}, C^{\mathbf{w}}\rangle[\,]\ \langle F'^{\mathbf{w}}, F^{\mathbf{e}}\rangle[\circ\circ]$, por los casos 1 y 2 se cumple que $\langle E^{\mathbf{w}}, C^{\mathbf{w}}\rangle[\ ] \overset{*}{\Rightarrow} w_1$ y $\langle F'^{\mathbf{w}}, F^{\mathbf{e}}\rangle[\alpha] \overset{*}{\Rightarrow} w_2$, y en consecuencia $\langle E^{\mathbf{w}}, G^{\mathbf{e}}\rangle[\alpha\langle\gamma', \eta\rangle] \overset{*}{\Rightarrow} w_1 w_2$.

• Si una derivación izquierda $\langle C^{\mathbf{w}}, E^{\mathbf{e}}\rangle[\alpha] \overset{*}{\Rightarrow} w$ reconoce la cadena w como resultado de aplicar la secuencia $p_1, \ldots, p_s$ de producciones en P, entonces existe una secuencia de transiciones $t_1, \ldots, t_s$ en Θ tal que la derivación $(\mathbf{w}, C, \xi, w) \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e}, E, \phi, \epsilon)$ es el resultado de aplicar la secuencia de transiciones $t_1, \ldots, t_s$.

La demostración se realiza por inducción en la longitud de las derivaciones de la gramática.

El caso base de la demostración lo constituye la derivación $\langle E^{\mathbf{w}}, C^{\mathbf{e}}\rangle[\ ] \Rightarrow \langle E^{\mathbf{w}}, E^{\mathbf{w}}\rangle[\ ]\ a \Rightarrow a$, para la que existe una derivación $(\mathbf{w}, E, \models^m, a) \vdash (\mathbf{e}, C, \models^m, \epsilon)$ en el autómata.

Por hipótesis de inducción suponemos que la proposición se cumple para cualquier derivación de la gramática de longitud s. En tal caso, durante el paso de inducción verificamos que se cumple para cualquier posible derivación de longitud mayor que s:

- Si $\langle E^{\mathbf{w}}, F^{\mathbf{e}}\rangle[\alpha] \Rightarrow \langle E^{\mathbf{w}}, C^{\mathbf{e}}\rangle[\alpha]\ a \overset{s}{\Rightarrow} wa)$, existe una transición $(\mathbf{e}, C, \epsilon) \overset{a}{\longmapsto} (\mathbf{e}, F, \epsilon)$, por hipótesis de inducción se cumple que $(\mathbf{w}, E, \xi, w) \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e}, C, \phi, \epsilon)$ y por consiguiente $(\mathbf{w}, E, \xi, wa) \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e}, F, \phi, \epsilon)$.
- Si $\langle E^{\mathbf{w}}, G^{\mathbf{e}}\rangle[\alpha] \Rightarrow \langle E^{\mathbf{w}}, C^{\mathbf{e}}\rangle[\alpha]\ \langle F'^{\mathbf{w}}, F^{\mathbf{e}}\rangle[\,] \overset{s_1}{\Rightarrow} w_1\ \langle F'^{\mathbf{w}}, F^{\mathbf{e}}\rangle[\,] \overset{s_2}{\Rightarrow} w_1 w_2$, existe una transición $(\mathbf{e}, C, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{w}, C{\models^{\mathbf{e}}}F', \models^{\mathbf{e}})$ y una transición $(C{\models^{\mathbf{e}}}F, \models^{\mathbf{e}}) \longmapsto (\mathbf{e}, G, \epsilon)$, por hipótesis de inducción se cumple que $(\mathbf{w}, E, \xi, w_1) \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e}, C, \phi, \epsilon)$ y que $(\mathbf{w}, F', \models^{\mathbf{e}}, w_2) \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e}, F, \models^{\mathbf{e}}, \epsilon)$ y en consecuencia se cumple que $(\mathbf{w}, E, \xi, w_1 w_2) \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e}, C, \phi, w_2) \vdash (\mathbf{w}, C{\models^{\mathbf{e}}}F', \phi{\models^{\mathbf{e}}}, w_2) \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e}, C{\models^{\mathbf{e}}}F, \phi{\models^{\mathbf{e}}}, \epsilon) \vdash (\mathbf{e}, G, \phi, \epsilon)$.
- Si $\langle E^{\mathbf{w}}, G^{\mathbf{e}}\rangle[\alpha] \Rightarrow \langle E^{\mathbf{w}}, C^{\mathbf{w}}\rangle[\,]\ \langle F'^{\mathbf{w}}, F^{\mathbf{e}}\rangle[\alpha] \overset{s_1}{\Rightarrow} w_1\ \langle F'^{\mathbf{w}}, F^{\mathbf{e}}\rangle[\alpha] \overset{s_2}{\Rightarrow} w_1 w_2$, existe una transición $(\mathbf{w}, C, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{w}, C{\rightarrow}F', \epsilon)$ y una transición $(\mathbf{e}, C{\rightarrow}F, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{e}, G, \epsilon)$, por los casos 1 y 2 se cumple que $(\mathbf{w}, E, \xi, w_1) \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w}, C, \xi, \epsilon)$ y por hipótesis de inducción $(\mathbf{w}, F', \xi, w_2) \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e}, F, \phi, \epsilon)$ y en consecuencia se cumple que $(\mathbf{w}, E, \xi, w_1 w_2) \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w}, C, \xi, w_2) \vdash (\mathbf{w}, C{\rightarrow}F', \xi, w_2) \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e}, C{\rightarrow}F, \phi, \epsilon) \vdash (\mathbf{e}, G, \phi, \epsilon)$.
- Si $\langle E^{\mathbf{w}}, G^{\mathbf{e}}\rangle[\alpha] \Rightarrow \langle E^{\mathbf{w}}, C^{\mathbf{w}}\rangle[\,]\ \langle F'^{\mathbf{w}}, F^{\mathbf{e}}\rangle[\alpha\langle\gamma', \eta'\rangle] \overset{s_1}{\Rightarrow} w_1\ \langle F'^{\mathbf{w}}, F^{\mathbf{e}}\rangle[\alpha\langle\gamma', \eta'\rangle] \overset{s_2}{\Rightarrow} w_1 w_2$, existe una transición $(\mathbf{w}, C, \epsilon) \longmapsto (C{\nearrow}F', \gamma')$ y una transición $(\mathbf{e}, C{\nearrow}F, \eta') \longmapsto (\mathbf{e}, G, \epsilon)$, por los casos 1 y 2 se cumple que $(\mathbf{w}, E, \xi, w_1) \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w}, C, \xi, \epsilon)$ y por hipótesis de inducción $(\mathbf{w}, F', \xi\gamma', w_2) \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e}, F, \phi\eta', \epsilon)$ y en consecuencia se cumple que $(\mathbf{w}, E, \xi, w_1 w_2) \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w}, C, \xi, w_2) \vdash (\mathbf{w}, C{\nearrow}F', \xi\gamma', w_2) \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e}, C{\nearrow}F, \phi\eta', \epsilon) \vdash (\mathbf{e}, G, \phi, \epsilon)$.

– Si $\langle E^{\mathbf{w}}, G^{\mathbf{e}}\rangle[\alpha\langle\gamma,\eta\rangle] \Rightarrow \langle E^{\mathbf{w}}, C^{\mathbf{w}}\rangle[\,]\ \langle F'^{\mathbf{w}}, F^{\mathbf{e}}\rangle[\alpha] \stackrel{s_1}{\Rightarrow} w_1\ \langle F'^{\mathbf{w}}, F^{\mathbf{e}}\rangle[\alpha] \stackrel{s_2}{\Rightarrow} w_1 w_2$, existe una transición $(\mathbf{w}, C, \gamma) \longmapsto (C\searrow F', \epsilon)$ y una transición $(\mathbf{e}, C\searrow F, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{e}, G, \eta)$, por los casos 1 y 2 se cumple que $(\mathbf{w}, E, \xi\gamma, w_1) \stackrel{*}{\vdash} (\mathbf{w}, C, \xi\gamma, \epsilon)$ y por hipótesis de inducción $(\mathbf{w}, F', \xi, w_2) \stackrel{*}{\vdash} (\mathbf{e}, F, \phi, \epsilon)$ y en consecuencia se cumple que $(\mathbf{w}, E, \xi\gamma, w_1 w_2) \stackrel{*}{\vdash} (\mathbf{w}, C, \xi\gamma, w_2) \vdash (\mathbf{w}, C\searrow F', \xi, w_2) \stackrel{*}{\vdash} (\mathbf{e}, C\searrow F, \phi, \epsilon) \vdash (\mathbf{e}, G, \phi\eta, \epsilon)$.

□

10.3.4 Tabulación

A partir de las características propias de los autómatas con dos pilas fuertemente dirigidos, podemos observar que toda derivación puede clasificarse en uno de los tipos que se enuncian a continuación.

Derivaciones de llamada. Son aquellas que se inician y terminan en modo de escritura en la misma sesión. Presentan alguna de las siguientes formas, dependiendo de la última transición aplicada:

$$\begin{aligned}(\mathbf{w},\, \Xi A, \xi, a_h \ldots a_n) &\stackrel{*}{\vdash}_{d1} (\mathbf{w},\, \Xi A\, \Xi_1 B, \xi\gamma\gamma', a_i \ldots a_n)\\ &\stackrel{*}{\vdash}_{d2} (\mathbf{w},\, \Xi A\, \Xi_1 B\searrow C, \xi\gamma, a_j \ldots a_n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{w},\, \Xi A, \xi, a_h \ldots a_n) &\stackrel{*}{\vdash}_{d1} (\mathbf{w},\, \Xi A\, \Xi_1 B, \xi\gamma, a_i \ldots a_n)\\ &\stackrel{*}{\vdash}_{d2} (\mathbf{w},\, \Xi A\, \Xi_1 B\rightarrow C, \xi\gamma, a_j \ldots a_n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{w},\, \Xi B, \xi\gamma', a_i \ldots a_n) &\stackrel{0}{\vdash}_{d1} (\mathbf{w},\, \Xi B, \xi\gamma', a_i \ldots a_n)\\ &\stackrel{*}{\vdash}_{d2} (\mathbf{w},\, \Xi B\nearrow C, \xi\gamma'\gamma, a_j \ldots a_n)\end{aligned}$$

donde $\gamma, \gamma' \in V_I$ (en el tercer caso $\gamma' \in V_I \cup \{\models^{\mathbf{w}}, \models^{\mathbf{e}}\}$) y tanto A como B y C pertenecen a la misma sesión. A efectos de uniformizar las explicaciones que siguen, en las derivaciones de la última forma identificaremos ΞA con ΞB y h con i. La subderivación d_1 puede consultar A pero no puede alterar ese elemento de la pila maestra ni ninguno que quede por debajo. En d_1 también se permite la consulta de γ' aunque no su modificación ni la de ξ. La subderivación d_2 puede consultar B pero no puede alterar ni B ni los elementos de la pila maestra que quedan por debajo. Esta subderivación tampoco puede modificar aquella parte de la pila auxiliar que finalmente queda por debajo de γ. En la figura 10.1 se muestra una representación gráfica de este tipo de derivaciones.

Para cualquier $\Xi' \in (\mathcal{D}V_S)^*$ y $\xi' \in (\models^x V_I^*)^*$ tal que $x \in \{\mathbf{w}, \mathbf{e}\}$ y el número de sesiones en Ξ' y ξ' coincide, se cumple

$$\begin{aligned}(\mathbf{w},\, \Xi' A, \xi', a_h \ldots a_n) &\stackrel{*}{\vdash}_{d1} (\mathbf{w},\, \Xi' A\, \Xi_1 B, \xi'\gamma\gamma', a_i \ldots a_n)\\ &\stackrel{*}{\vdash}_{d2} (\mathbf{w},\, \Xi' A\, \Xi_1 B\searrow C, \xi'\gamma, a_j \ldots a_n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{w},\, \Xi' A, \xi', a_h \ldots a_n) &\stackrel{*}{\vdash}_{d1} (\mathbf{w},\, \Xi' A\, \Xi_1 B, \xi'\gamma, a_i \ldots a_n)\\ &\stackrel{*}{\vdash}_{d2} (\mathbf{w},\, \Xi' A\, \Xi_1 B\rightarrow C, \xi'\gamma, a_j \ldots a_n)\end{aligned}$$

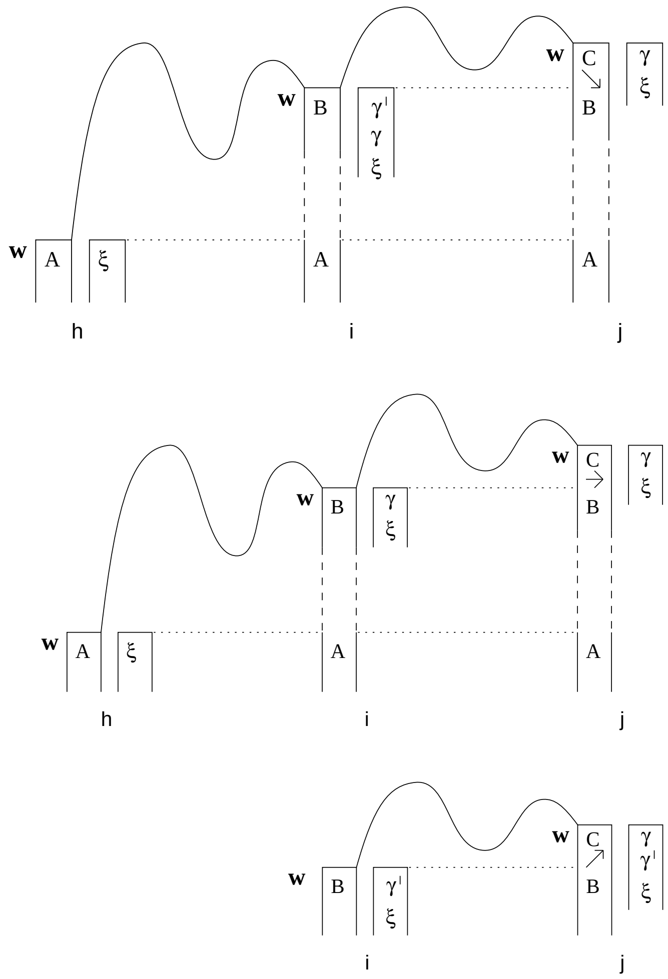

Figura 10.1: Derivaciones de llamada en SD–2SA

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{w},\, \Xi' B, \xi'\gamma', a_i \ldots a_n) \;& \overset{0}{\vdash}_{d1} (\mathbf{w},\, \Xi' B, \xi'\gamma', a_i \ldots a_n) \\
& \overset{*}{\vdash}_{d2} (\mathbf{w},\, \Xi' B \nearrow C, \xi'\gamma'\gamma, a_j \ldots a_n)
\end{aligned}
$$

por lo que este tipo de derivaciones puede ser representado de manera compacta por los correspondientes ítems de la forma

$$[A, h \mid B, i, \gamma', \searrow C, j, \gamma \mid -, -, -, -, -]\mathbf{w}$$
$$[A, h \mid B, i, \gamma, \rightarrow C, j, \gamma \mid -, -, -, -, -]\mathbf{w}$$
$$[B, i \mid B, i, \gamma', \nearrow C, j, \gamma \mid -, -, -, -, -]\mathbf{w}$$

Derivaciones de retorno. Son aquellas que se inician en una sesión en modo de escritura y terminan en la misma sesión en modo de borrado. Estas derivaciones pueden ser de alguna de las tres formas siguientes:

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{w},\, \Xi A, \xi, a_h \ldots a_n) \;& \overset{*}{\vdash}_{d1} (\mathbf{w},\, \Xi A\, \Xi_1 B, \xi\gamma\gamma', a_i \ldots a_n) \\
& \overset{*}{\vdash}_{d2} (\mathbf{w},\, \Xi A\, \Xi_1 B\, \Xi_2 D, \xi\gamma, a_p \ldots a_n) \\
& \overset{*}{\vdash}_{d3} (\mathbf{e},\, \Xi A\, \Xi_1 B\, \Xi_2 D \searrow E, \phi, a_q \ldots a_n) \\
& \overset{*}{\vdash}_{d4} (\mathbf{e},\, \Xi A\, \Xi_1 B \searrow C, \phi\eta, a_j \ldots a_n)
\end{aligned}
$$

$$\begin{array}{rl} (\mathbf{w},\,\Xi A,\xi,a_h\ldots a_n) & \overset{*}{\vdash}_{d1}(\mathbf{w},\,\Xi A\,\Xi_1 B,\xi\gamma,a_i\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash}_{d2}(\mathbf{w},\,\Xi A\,\Xi_1 B\,\Xi_2 D,\xi\gamma,a_p\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash}_{d3}(\mathbf{e},\,\Xi A\,\Xi_1 B\,\Xi_2 D\searrow E,\phi,a_q\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash}_{d4}(\mathbf{e},\,\Xi A\,\Xi_1 B\rightarrow C,\phi\eta,a_j\ldots a_n) \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} (\mathbf{w},\,\Xi B,\xi\gamma',a_i\ldots a_n) & \overset{0}{\vdash}_{d1}(\mathbf{w},\,\Xi B,\xi\gamma',a_i\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash}_{d2}(\mathbf{w},\,\Xi B\,\Xi_2 D,\xi\gamma'\gamma,a_p\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash}_{d3}(\mathbf{e},\,\Xi B\,\Xi_2 D\searrow E,\phi\eta',a_q\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash}_{d4}(\mathbf{e},\,\Xi B\nearrow C,\phi\eta'\eta,a_j\ldots a_n) \end{array}$$

donde $\gamma,\gamma',\gamma'',\eta,\eta'\in V_I$ (en el tercer caso $\gamma'\in V_I\cup\{\models^{\mathbf{w}},\models^{\mathbf{e}}\}$) y tanto A como B, D, E y C pertenecen a la misma sesión. A efectos de uniformizar las explicaciones que siguen, en las derivaciones de la última forma identificaremos ΞA con ΞB y h con i. La subderivación d_1 puede consultar A pero no puede alterar ese elemento de la pila maestra ni ninguno que quede por debajo. En d_1 también se permite la consulta de γ' aunque no su modificación ni la de ξ. Las subderivaciones d_2 y d_4 no pueden modificar B ni ningún elemento de la pila maestra que queda por debajo, aunque la subderivación d_2 puede consultar el propio B. La subderivación d_3 puede consultar D pero no puede alterar dicho elemento ni ningún otro de la pila maestra que quede por debajo. Las distintas apariciones de las pilas $\xi\gamma$, $\xi\gamma'$, ϕ y $\phi\eta'$ que aparecen a lo largo de la derivación se refieren a la misma pila y no a pilas que eventualmente resulten con los mismos contenidos después de apilar y extraer diversos elementos. En la figura 10.2 se muestra una representación gráfica de este tipo de derivaciones.

Para cualquier $\Xi'\in(\mathcal{D}V_S)^*$ y $\xi',\phi'\in(\models^x V_I^*)^*$ tal que $x\in\{\mathbf{w},\mathbf{e}\}$, el número de sesiones en Ξ', ξ' y ϕ' coincide y, según el caso, existe una derivación

$$(\mathbf{w},D,\xi\gamma,a_p\ldots a_n)\overset{*}{\vdash}(\mathbf{e},D\searrow E,\phi,a_q\ldots a_n)$$

$$(\mathbf{w},D,\xi\gamma,a_p\ldots a_n)\overset{*}{\vdash}(\mathbf{e},D\searrow E,\phi,a_q\ldots a_n)$$

$$(\mathbf{w},D,\xi\gamma'\gamma,a_p\ldots a_n)\overset{*}{\vdash}(\mathbf{e},D\searrow E,\phi\eta',a_q\ldots a_n)$$

se cumple que

$$\begin{array}{rl} (\mathbf{w},\,\Xi' A,\xi',a_h\ldots a_n) & \overset{*}{\vdash}_{d1}(\mathbf{w},\,\Xi' A\,\Xi_1 B,\xi'\gamma\gamma',a_i\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash}_{d2}(\mathbf{w},\,\Xi' A\,\Xi_1 B\,\Xi_2 D,\xi'\gamma,a_p\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash}_{d3}(\mathbf{e},\,\Xi' A\,\Xi_1 B\,\Xi_2 D\searrow E,\phi',a_q\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash}_{d4}(\mathbf{e},\,\Xi' A\,\Xi_1 B\searrow C,\phi'\eta,a_j\ldots a_n) \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} (\mathbf{w},\,\Xi' A,\xi',a_h\ldots a_n) & \overset{*}{\vdash}_{d1}(\mathbf{w},\,\Xi' A\,\Xi_1 B,\xi'\gamma,a_i\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash}_{d2}(\mathbf{w},\,\Xi' A\,\Xi_1 B\,\Xi_2 D,\xi'\gamma,a_p\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash}_{d3}(\mathbf{e},\,\Xi' A\,\Xi_1 B\,\Xi_2 D\searrow E,\phi',a_q\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash}_{d4}(\mathbf{e},\,\Xi' A\,\Xi_1 B\rightarrow C,\phi'\eta,a_j\ldots a_n) \end{array}$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{w},\ \Xi' B, \xi'\gamma', a_i \ldots a_n) &\overset{0}{\vdash}_{d1} (\mathbf{w},\ \Xi' B, \xi'\gamma', a_i \ldots a_n)\\ &\overset{*}{\vdash}_{d2} (\mathbf{w},\ \Xi' B\, \Xi_2 D, \xi'\gamma'\gamma, a_p \ldots a_n)\\ &\overset{*}{\vdash}_{d3} (\mathbf{e},\ \Xi' B\, \Xi_2 D{\searrow}E, \phi'\eta', a_q \ldots a_n)\\ &\overset{*}{\vdash}_{d4} (\mathbf{e},\ \Xi' B{\nearrow}C, \phi'\eta'\eta, a_j \ldots a_n)\end{aligned}$$

Ello posibilita que las derivaciones de retorno puedan ser representadas por ítems de la forma

$$[A, h \mid B, i, \gamma', {\searrow}C, j, \eta \mid D, p, \gamma, E, q]\mathbf{e}$$
$$[A, h \mid B, i, \gamma, {\to}C, j, \eta \mid D, p, \gamma, E, q]\mathbf{e}$$
$$[A, h \mid B, i, \gamma', {\nearrow}C, j, \eta \mid D, p, \gamma, E, q]\mathbf{e}$$

Derivaciones de puntos especiales. Son aquellas derivaciones que involucran una sesión vacía en la pila auxiliar, por lo que presentan la forma

$$(m,\ \Xi B, \xi\gamma', a_i \ldots a_n) \overset{*}{\vdash} (m',\ \Xi B{\models^m}C, \xi\gamma'{\models^m}, a_j \ldots a_n)$$
$$(\mathbf{w},\ \Xi B, \xi{\models^m}\gamma, a_i \ldots a_n) \overset{*}{\vdash} (m',\ \Xi B{\searrow}C, \xi{\models^m}, a_j \ldots a_n)$$
$$(\mathbf{w},\ \Xi B, \xi{\models^m}, a_i \ldots a_n) \overset{*}{\vdash} (m',\ \Xi B{\to}C, \xi{\models^m}, a_j \ldots a_n)$$

donde $\mathbf{w} \leq m'$, $\gamma' \in V_I \cup \{\models^{\mathbf{w}}, \models^{\mathbf{e}}\}$ y $\gamma \in V_I$. Las derivaciones de puntos especiales se muestran gráficamente en la figura 10.3.

Para cualquier $\Xi' \in (\mathcal{D}V_S)^*$ y $\xi' \in (\models^x V_I^*)^*$ tal que $x \in \{\mathbf{w}, \mathbf{e}\}$ y el número de sesiones en Ξ' y ξ' coincide, se cumple

$$(m,\ \Xi' B, \xi'\gamma', a_i \ldots a_n) \overset{*}{\vdash} (m',\ \Xi' B{\models^m}C, \xi'\gamma'{\models^m}, a_j \ldots a_n)$$
$$(\mathbf{w},\ \Xi' B, \xi'{\models^m}\gamma, a_i \ldots a_n) \overset{*}{\vdash} (m',\ \Xi' B{\searrow}C, \xi'{\models^m}, a_j \ldots a_n)$$
$$(\mathbf{w},\ \Xi' B, \xi'{\models^m}, a_i \ldots a_n) \overset{*}{\vdash} (m',\ \Xi' B{\to}C, \xi'{\models^m}, a_j \ldots a_n)$$

por lo que podemos utilizar ítems de la siguientes formas para representar este tipo de derivaciones:

$$[-, - \mid B, i, \gamma', {\models^m}C, j, {\models^m} \mid -, -, -, -, -]m'$$
$$[-, - \mid B, i, \gamma, {\searrow}C, j, {\models^m} \mid -, -, -, -, -]m'$$
$$[-, - \mid B, i, {\models^m}, {\to}C, j, {\models^m} \mid -, -, -, -, -]m'$$

Los ítems se combinan mediante las reglas descritas en la tabla 10.7, a partir de un ítem inicial

$$[-, - \mid -, -, -, {\models^{\mathbf{w}}}\$_0, 0, {\models^{\mathbf{w}}} \mid -, -, -, -, -]\mathbf{w}$$

La aceptación de la cadena se entrada $a_1 \ldots a_n$ se indica mediante la presencia de ítems de la forma

$$[-, - \mid \$_0, 0, {\models^{\mathbf{w}}}, {\models^{\mathbf{w}}}\$_f, n, {\models^{\mathbf{w}}} \mid -, -, -, -, -]\mathbf{e}$$

Teorema 10.5 *La manipulación de configuraciones mediante la aplicación de transiciones en los autómatas con dos pilas fuertemente dirigidos es equivalente a la manipulación de ítems mediante las reglas de combinación de la tabla 10.7.*

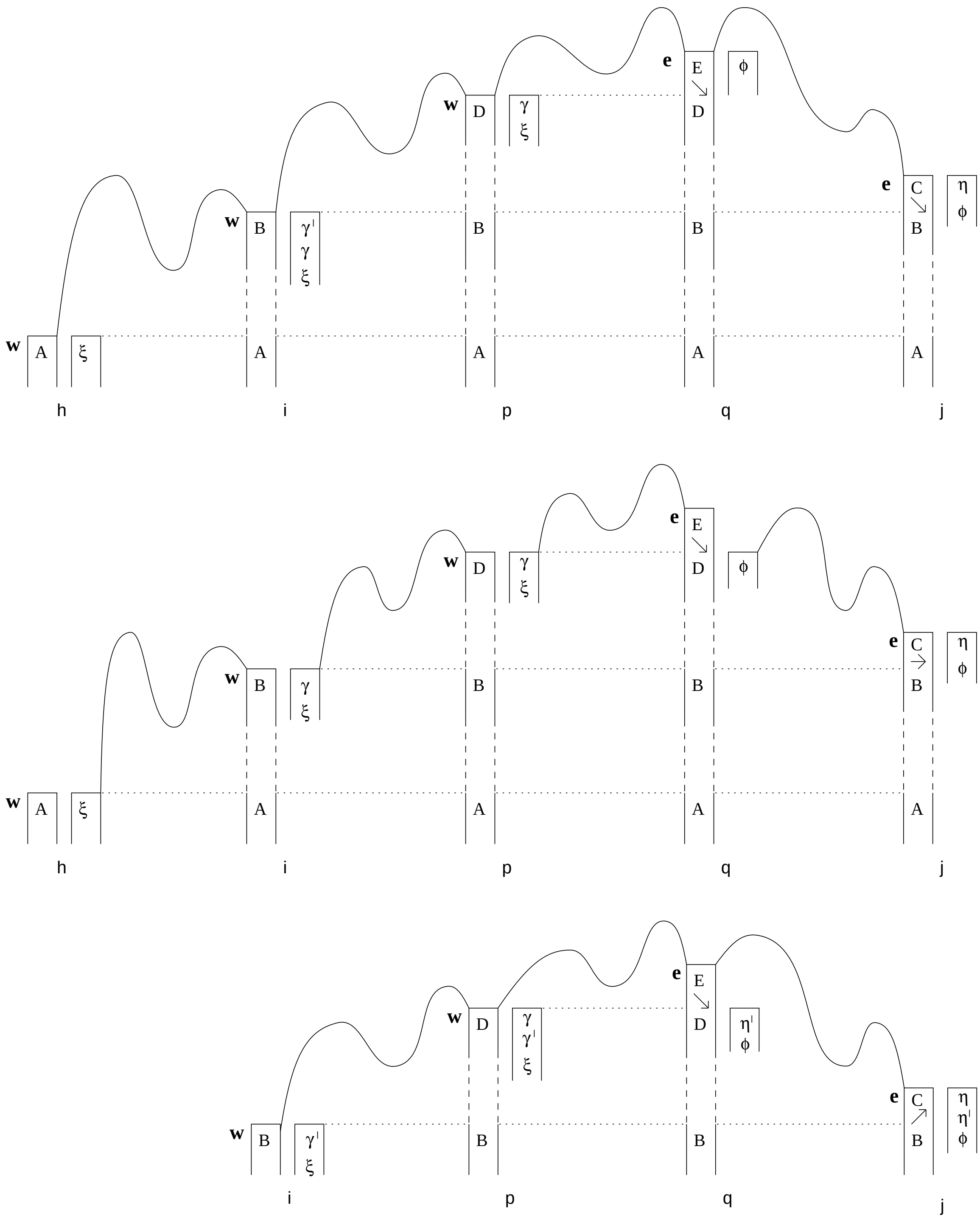

Figura 10.2: Derivaciones de retorno en SD–2SA

$$\frac{[A,h \mid B,i,\gamma',\otimes C,j,\eta \mid D,p,\gamma,E,q]m}{[A,h \mid B,i,\gamma',\otimes F,k,\eta \mid D,p,\gamma,E,q]m} \quad \begin{array}{l}(m,C,\epsilon) \stackrel{a}{\longmapsto} (m,F,\epsilon),\\ k=j \text{ si } a=\epsilon,\ \ k=j+1 \text{ si } a\in V_T\end{array}$$

$$\frac{[A,h \mid B,i,\gamma',\otimes C,j,\eta \mid D,p,\gamma,E,q]m}{[-,- \mid C,j,\eta,\models^m F,j,\models^m \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}} \quad (m,C,\epsilon) \longmapsto (\mathbf{w},C\models^m F,\models^m)$$

$$\frac{[A,h \mid B,i,\gamma',\otimes C,j,\gamma \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}}{[A,h \mid C,j,\gamma,\rightarrow F,j,\gamma \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}} \quad (\mathbf{w},C,\epsilon) \longmapsto (\mathbf{w},C\rightarrow F,\epsilon)$$

$$\frac{[A,h \mid B,i,\gamma'',\otimes C,j,\gamma \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}}{[C,j \mid C,j,\gamma,\nearrow F,j,\gamma' \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}} \quad (\mathbf{w},C,\epsilon) \longmapsto (\mathbf{w},C\nearrow F,\gamma')$$

$$\frac{\begin{array}{c}[A,h \mid B,i,\gamma'',\otimes_1 C,j,\gamma \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}\\ [M,m \mid N,t,\gamma''',\otimes_2 A,h,\gamma' \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}\end{array}}{[M,m \mid C,j,\gamma,\searrow F,j,\gamma' \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}} \quad (\mathbf{w},C,\gamma) \longmapsto (\mathbf{w},C\searrow F,\epsilon)$$

$$\frac{[-,- \mid B,i,\gamma',\otimes C,j,\models^m \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}}{[-,- \mid B,i,\gamma',\otimes F,k,\models^m \mid -,-,-,-,-]\mathbf{e}} \quad \begin{array}{l}(\mathbf{w},C,\models^m) \stackrel{a}{\longmapsto} (\mathbf{e},F,\models^m),\\ k=j \text{ si } a=\epsilon,\ \ k=j+1 \text{ si } a\in V_T\end{array}$$

$$\frac{\begin{array}{c}[-,- \mid C,j,\eta,\models^m F,k,\models^m \mid -,-,-,-,-]\mathbf{e}\\ [A,h \mid B,i,\gamma',\otimes C,j,\eta \mid D,p,\gamma,E,q]m\end{array}}{[A,h \mid B,i,\gamma',\otimes G,k,\eta \mid D,p,\gamma,E,q]m} \quad (\mathbf{e},C\models^m F,\models^m) \longmapsto (m,G,\epsilon)$$

$$\frac{\begin{array}{c}[A,h \mid C,j,\gamma,\rightarrow F,k,\eta \mid D,p,\gamma,E,q]\mathbf{e}\\ [A,h \mid B,i,\gamma',\otimes C,j,\gamma \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}\end{array}}{[A,h \mid B,i,\gamma',\otimes G,k,\eta \mid D,p,\gamma,E,q]\mathbf{e}} \quad (\mathbf{e},C\rightarrow F,\epsilon) \longmapsto (\mathbf{e},G,\epsilon)$$

$$\frac{\begin{array}{c}[C,j \mid C,j,\gamma,\nearrow F,k,\eta' \mid D,p,\gamma',E,q]\mathbf{e}\\ [A,h \mid B,i,\gamma'',\otimes C,j,\gamma \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}\\ [A,h \mid D,p,\gamma',\searrow E,q,\eta \mid O,u,\gamma,P,v]\mathbf{e}\end{array}}{[A,h \mid B,i,\gamma'',\otimes G,k,\eta \mid O,u,\gamma,P,v]\mathbf{e}} \quad (\mathbf{e},C\nearrow F,\eta') \longmapsto (\mathbf{e},G,\epsilon)$$

$$\frac{\begin{array}{c}[M,m \mid C,j,\gamma,\searrow F,k,\eta' \mid D,p,\gamma',E,q]\mathbf{e}\\ [A,h \mid B,i,\gamma'',\otimes_1 C,j,\gamma \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}\\ [M,m \mid N,t,\gamma''',\otimes_2 A,h,\gamma' \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}\end{array}}{[A,h \mid B,i,\gamma'',\otimes_1 G,k,\eta \mid C,j,\gamma,\searrow F,k]\mathbf{e}} \quad (\mathbf{e},C\searrow F,\epsilon) \longmapsto (\mathbf{e},G,\eta)$$

Tabla 10.7: Reglas de combinación de ítems en SD–2SA

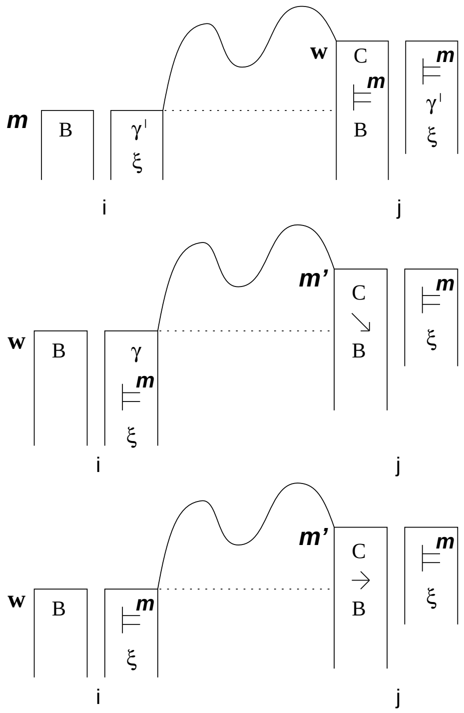

Figura 10.3: Derivaciones de puntos especiales en SD–2SA

Demostración:

Mostraremos que para toda derivación existe una regla de combinación que produce un ítem que representa de forma compacta dicha derivación y que para toda regla de combinación se corresponde con una derivación válida del autómata. Para ello detallaremos todas las posibles derivaciones, junto con las reglas de combinación de ítems correspondientes, en la siguiente lista.

- Derivaciones que son el resultado de aplicar una transición $(m, C, \epsilon) \overset{a}{\longmapsto} (m, F, \epsilon)$
  - a una derivación de llamada, con las tres posibilidades siguientes, en las cuales $k = j$ si $a = \epsilon$ y $k = j + 1$ si $a \in V_T$:

$$\begin{aligned}(\mathbf{w},\, \Xi A, \xi, a_h \ldots a_n) &\overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\, \Xi A\, \Xi_1 B, \xi\gamma\gamma', a_i \ldots a_n)\\ &\overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\, \Xi A\, \Xi_1 B {\searrow} C, \xi\gamma, a_j \ldots a_n)\\ &\vdash (\mathbf{w},\, \Xi A\, \Xi_1 B {\searrow} F, \xi\gamma, a_k \ldots a_n)\end{aligned}$$

$$\frac{[A, h \mid B, i, \gamma', {\searrow} C, j, \gamma \mid -, -, -, -, -]\mathbf{w}}{[A, h \mid B, i, \gamma', {\searrow} F, k, \gamma \mid -, -, -, -, -]\mathbf{w}} \quad (\mathbf{w}, C, \epsilon) \overset{a}{\longmapsto} (\mathbf{w}, F, \epsilon)$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{w},\, \Xi A, \xi, a_h \ldots a_n) &\overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\, \Xi A\, \Xi_1 B, \xi\gamma, a_i \ldots a_n)\\ &\overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\, \Xi A\, \Xi_1 B {\rightarrow} C, \xi\gamma, a_j \ldots a_n)\\ &\vdash (\mathbf{w},\, \Xi A\, \Xi_1 B {\rightarrow} F, \xi\gamma, a_k \ldots a_n)\end{aligned}$$

$$\frac{[A, h \mid B, i, \gamma, {\rightarrow} C, j, \gamma \mid -, -, -, -, -]\mathbf{w}}{[A, h \mid B, i, \gamma, {\rightarrow} F, k, \gamma \mid -, -, -, -, -]\mathbf{w}} \quad (\mathbf{w}, C, \epsilon) \overset{a}{\longmapsto} (\mathbf{w}, F, \epsilon)$$

$$\begin{array}{rl}(\mathbf{w},\,\Xi B,\xi\gamma',a_i\dots a_n) & \overset{0}{\vdash} (\mathbf{w},\,\Xi B,\xi\gamma',a_i\dots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\,\Xi B{\nearrow}C,\xi\gamma'\gamma,a_j\dots a_n)\\ & \vdash (\mathbf{w},\,\Xi B{\nearrow}F,\xi\gamma'\gamma,a_k\dots a_n)\end{array}$$

$$\frac{[B,i\mid B,i,\gamma',{\nearrow}C,j,\gamma\mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}}{[B,i\mid B,i,\gamma',{\nearrow}F,k,\gamma\mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}}\quad (\mathbf{w},C,\epsilon)\overset{a}{\longmapsto}(\mathbf{w},F,\epsilon)$$

– a una derivación de retorno, con las tres posibilidades siguientes, en las cuales $k=j$ si $a=\epsilon$ y $k=j+1$ si $a\in V_T$:

$$\begin{array}{rl}(\mathbf{w},\,\Xi A,\xi,a_h\dots a_n) & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\,\Xi A\,\Xi_1 B,\xi\gamma\gamma',a_i\dots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\,\Xi A\,\Xi_1 B\,\Xi_2 D,\xi\gamma,a_p\dots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e},\,\Xi A\,\Xi_1 B\,\Xi_2 D{\searrow}E,\phi,a_q\dots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e},\,\Xi A\,\Xi_1 B{\searrow}C,\phi\eta,a_j\dots a_n)\\ & \vdash (\mathbf{e},\,\Xi A\,\Xi_1 B{\searrow}F,\phi\eta,a_k\dots a_n)\end{array}$$

$$\frac{[A,h\mid B,i,\gamma',{\searrow}C,j,\eta\mid D,p,\gamma,E,q]\mathbf{e}}{[A,h\mid B,i,\gamma',{\searrow}F,k,\eta\mid D,p,\gamma,E,q]\mathbf{e}}\quad (\mathbf{e},C,\epsilon)\overset{a}{\longmapsto}(\mathbf{e},F,\epsilon)$$

$$\begin{array}{rl}(\mathbf{w},\,\Xi A,\xi,a_h\dots a_n) & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\,\Xi A\,\Xi_1 B,\xi\gamma,a_i\dots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\,\Xi A\,\Xi_1 B\,\Xi_2 D,\xi\gamma,a_p\dots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e},\,\Xi A\,\Xi_1 B\,\Xi_2 D{\searrow}E,\phi,a_q\dots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e},\,\Xi A\,\Xi_1 B{\rightarrow}C,\phi\eta,a_j\dots a_n)\\ & \vdash (\mathbf{e},\,\Xi A\,\Xi_1 B{\rightarrow}F,\phi\eta,a_k\dots a_n)\end{array}$$

$$\frac{[A,h\mid B,i,\gamma,{\rightarrow}C,j,\eta\mid D,p,\gamma,E,q]\mathbf{e}}{[A,h\mid B,i,\gamma,{\rightarrow}F,k,\eta\mid D,p,\gamma,E,q]\mathbf{e}}\quad (\mathbf{e},C,\epsilon)\overset{a}{\longmapsto}(\mathbf{e},F,\epsilon)$$

$$\begin{array}{rl}(\mathbf{w},\,\Xi B,\xi\gamma',a_i\dots a_n) & \overset{0}{\vdash} (\mathbf{w},\,\Xi B,\xi\gamma',a_i\dots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\,\Xi B\,\Xi_2 D,\xi\gamma'\gamma,a_p\dots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e},\,\Xi B\,\Xi_2 D{\searrow}E,\phi\eta',a_q\dots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e},\,\Xi B{\nearrow}C,\phi\eta'\eta,a_j\dots a_n)\\ & \vdash (\mathbf{e},\,\Xi B{\nearrow}F,\phi\eta'\eta,a_k\dots a_n)\end{array}$$

$$\frac{[B,i\mid B,i,\gamma',{\nearrow}C,j,\eta\mid D,p,\gamma,E,q]\mathbf{e}}{[B,i\mid B,i,\gamma',{\nearrow}F,k,\eta\mid D,p,\gamma,E,q]\mathbf{e}}\quad (\mathbf{e},C,\epsilon)\overset{a}{\longmapsto}(\mathbf{e},F,\epsilon)$$

– a una derivación de puntos especiales, con las tres posibilidades siguientes, en las cuales $k=j$ si $a=\epsilon$ y $k=j+1$ si $a\in V_T$:

$$\begin{array}{rl}(m,\,\Xi B,\xi\gamma',a_i\dots a_n) & \overset{*}{\vdash} (m',\,\Xi B{\models^m}C,\xi\gamma'{\models^m},a_j\dots a_n)\\ & \vdash (m',\,\Xi B{\models^m}F,\xi\gamma'{\models^m},a_k\dots a_n)\end{array}$$

$$\frac{[-,-\mid B,i,\gamma',{\models^m}C,j,{\models^m}\mid -,-,-,-,-]m'}{[-,-\mid B,i,\gamma',{\models^m}F,k,{\models^m}\mid -,-,-,-,-]m'}\quad (\mathbf{w},C,\epsilon)\overset{a}{\longmapsto}(\mathbf{w},F,\epsilon)$$

$$\begin{array}{rl}(\mathbf{w},\,\Xi B,\xi{\models^m}\gamma,a_i\dots a_n) & \overset{*}{\vdash} (m',\,\Xi B{\searrow}C,\xi{\models^m},a_j\dots a_n)\\ & \vdash (m',\,\Xi B{\searrow}F,\xi{\models^m},a_k\dots a_n)\end{array}$$

$$\frac{[-,- \mid B,i,\gamma,\searrow C,j,\models^m \mid -,-,-,-,-]m'}{[-,- \mid B,i,\gamma,\searrow F,k,\models^m \mid -,-,-,-,-]m'} \quad (m',C,\epsilon) \overset{a}{\longmapsto} (m',F,\epsilon)$$

$$\begin{array}{ll}(\mathbf{w},\, \Xi B, \xi\models^m, a_i \dots a_n) & \overset{*}{\vdash} (m',\, \Xi B{\to}C, \xi\models^m, a_j \dots a_n) \\ & \vdash (m',\, \Xi B{\to}F, \xi\models^m, a_k \dots a_n)\end{array}$$

$$\frac{[-,- \mid B,i,\models^m,\to C,j,\models^m \mid -,-,-,-,-]m'}{[-,- \mid B,i,\models^m,\to F,k,\models^m \mid -,-,-,-,-]m'} \quad (m',C,\epsilon) \overset{a}{\longmapsto} (m',F,\epsilon)$$

- Derivaciones que son el resultado de aplicar una transición $(m,C,\epsilon) \longmapsto (\mathbf{w},C\models^m F,\models^m)$
  - a una derivación de llamada, con las tres posibilidades siguientes:

$$\begin{array}{ll}(\mathbf{w},\, \Xi A, \xi, a_h \dots a_n) & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\, \Xi A\, \Xi_1 B, \xi\gamma\gamma', a_i \dots a_n) \\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\, \Xi A\, \Xi_1 B{\searrow}C, \xi\gamma, a_j \dots a_n) \\ & \vdash (\mathbf{w},\, \Xi A\, \Xi_1 B{\searrow}C\models^{\mathbf{w}} F, \xi\gamma\models^{\mathbf{w}}, a_j \dots a_n)\end{array}$$

$$\frac{[A,h \mid B,i,\gamma',\searrow C,j,\gamma \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}}{[-,- \mid C,j,\gamma,\models^{\mathbf{w}} F,j,\models^{\mathbf{w}} \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}} \quad (\mathbf{w},C,\epsilon) \longmapsto (\mathbf{w},C\models^{\mathbf{w}} F,\models^{\mathbf{w}})$$

$$\begin{array}{ll}(\mathbf{w},\, \Xi A, \xi, a_h \dots a_n) & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\, \Xi A\, \Xi_1 B, \xi\gamma, a_i \dots a_n) \\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\, \Xi A\, \Xi_1 B{\to}C, \xi\gamma, a_j \dots a_n) \\ & \vdash (\mathbf{w},\, \Xi A\, \Xi_1 B{\to}C\models^{\mathbf{w}} F, \xi\gamma\models^{\mathbf{w}}, a_j \dots a_n)\end{array}$$

$$\frac{[A,h \mid B,i,\gamma,\searrow C,j,\gamma \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}}{[-,- \mid C,j,\gamma,\models^{\mathbf{w}} F,j,\models^{\mathbf{w}} \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}} \quad (\mathbf{w},C,\epsilon) \longmapsto (\mathbf{w},C\models^{\mathbf{w}} F,\models^{\mathbf{w}})$$

$$\begin{array}{ll}(\mathbf{w},\, \Xi B, \xi\gamma', a_i \dots a_n) & \overset{0}{\vdash} (\mathbf{w},\, \Xi B, \xi\gamma', a_i \dots a_n) \\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\, \Xi B{\nearrow}C, \xi\gamma'\gamma, a_j \dots a_n) \\ & \vdash (\mathbf{w},\, \Xi B{\nearrow}C\models^{\mathbf{w}} F, \xi\gamma'\gamma\models^{\mathbf{w}}, a_j \dots a_n)\end{array}$$

$$\frac{[B,i \mid B,i,\gamma',\searrow C,j,\gamma \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}}{[-,- \mid C,j,\gamma,\models^{\mathbf{w}} F,j,\models^{\mathbf{w}} \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}} \quad (\mathbf{w},C,\epsilon) \longmapsto (\mathbf{w},C\models^{\mathbf{w}} F,\models^{\mathbf{w}})$$

  - a una derivación de retorno, con las tres posibilidades siguientes:

$$\begin{array}{ll}(\mathbf{w},\, \Xi A, \xi, a_h \dots a_n) & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\, \Xi A\, \Xi_1 B, \xi\gamma\gamma', a_i \dots a_n) \\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\, \Xi A\, \Xi_1 B\, \Xi_2 D, \xi\gamma, a_p \dots a_n) \\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e},\, \Xi A\, \Xi_1 B\, \Xi_2 D{\searrow}E, \phi, a_q \dots a_n) \\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e},\, \Xi A\, \Xi_1 B{\searrow}C, \phi\eta, a_j \dots a_n) \\ & \vdash (\mathbf{w},\, \Xi A\, \Xi_1 B{\searrow}C\models^{\mathbf{e}} F, \phi\eta\models^{\mathbf{e}}, a_j \dots a_n)\end{array}$$

$$\frac{[A,h \mid B,i,\gamma',\searrow C,j,\eta \mid D,p,\gamma,E,q]\mathbf{e}}{[-,- \mid C,j,\eta,\models^{\mathbf{e}} F,j,\models^{\mathbf{e}} \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}} \quad (\mathbf{e},C,\epsilon) \longmapsto (\mathbf{w},C\models^{\mathbf{e}} F,\models^{\mathbf{e}})$$

$$\begin{array}{ll}(\mathbf{w},\, \Xi A, \xi, a_h \dots a_n) & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\, \Xi A\, \Xi_1 B, \xi\gamma, a_i \dots a_n) \\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\, \Xi A\, \Xi_1 B\, \Xi_2 D, \xi\gamma, a_p \dots a_n) \\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e},\, \Xi A\, \Xi_1 B\, \Xi_2 D{\searrow}E, \phi, a_q \dots a_n) \\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e},\, \Xi A\, \Xi_1 B{\to}C, \phi\eta, a_j \dots a_n) \\ & \vdash (\mathbf{w},\, \Xi A\, \Xi_1 B{\to}C\models^{\mathbf{e}} F, \phi\eta\models^{\mathbf{e}}, a_j \dots a_n)\end{array}$$

$$\frac{[A,h \mid B,i,\gamma,\rightarrow C,j,\eta \mid D,p,\gamma,E,q]\mathbf{e}}{[-,- \mid C,j,\eta,\models^{\mathbf{e}}F,j,\models^{\mathbf{e}} \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}} \quad (\mathbf{e},C,\epsilon) \longmapsto (\mathbf{w},C\models^{\mathbf{e}}F,\models^{\mathbf{e}})$$

$$\begin{array}{ll}(\mathbf{w},\,\Xi B,\xi\gamma',a_i\dots a_n) & \overset{0}{\vdash} (\mathbf{w},\,\Xi B,\xi\gamma',a_i\dots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\,\Xi B\,\Xi_2 D,\xi\gamma'\gamma,a_p\dots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e},\,\Xi B\,\Xi_2 D\searrow E,\phi\eta',a_q\dots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e},\,\Xi B\nearrow C,\phi\eta'\eta,a_j\dots a_n)\\ & \vdash (\mathbf{w},\,\Xi B\nearrow C\models^{\mathbf{e}}F,\phi\eta'\eta\models^{\mathbf{e}},a_j\dots a_n)\end{array}$$

$$\frac{[B,i \mid B,i,\gamma',\nearrow C,j,\eta \mid D,p,\gamma,E,q]\mathbf{e}}{[-,- \mid C,j,\eta,\models^{\mathbf{e}}F,j,\models^{\mathbf{e}} \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}} \quad (\mathbf{e},C,\epsilon) \longmapsto (\mathbf{w},C\models^{\mathbf{e}}F,\models^{\mathbf{e}})$$

- a una derivación de puntos especiales, con las tres posibilidades siguientes:

$$\begin{array}{ll}(m,\,\Xi B,\xi\gamma',a_i\dots a_n) & \overset{*}{\vdash} (m',\,\Xi B\models^m C,\xi\gamma'\models^m,a_j\dots a_n)\\ & \vdash (\mathbf{w},\,\Xi B\models^m C\models^{m'}F,\xi\gamma'\models^m\models^{m'},a_j\dots a_n)\end{array}$$

$$\frac{[-,- \mid B,i,\gamma',\models^m C,j,\models^m \mid -,-,-,-,-]m'}{[-,- \mid C,j,\models^m,\models^{m'}F,j,\models^{m'} \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}} \quad (m',C,\epsilon) \longmapsto (\mathbf{w},C\models^{m'}F,\models^{m'})$$

$$\begin{array}{ll}(\mathbf{w},\,\Xi B,\xi\models^m\gamma,a_i\dots a_n) & \overset{*}{\vdash} (m',\,\Xi B\searrow C,\xi\models^m,a_j\dots a_n)\\ & \vdash (\mathbf{w},\,\Xi B\searrow C\models^{m'}F,\xi\models^m\models^{m'},a_j\dots a_n)\end{array}$$

$$\frac{[-,- \mid B,i,\gamma,\searrow C,j,\models^m \mid -,-,-,-,-]m'}{[-,- \mid C,j,\models^m,\models^{m'}F,j,\models^{m'} \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}} \quad (m',C,\epsilon) \longmapsto (\mathbf{w},C\models^{m'}F,\models^{m'})$$

$$\begin{array}{ll}(\mathbf{w},\,\Xi B,\xi\models^m,a_i\dots a_n) & \overset{*}{\vdash} (m',\,\Xi B\rightarrow C,\xi\models^m,a_j\dots a_n)\\ & \vdash (\mathbf{w},\,\Xi B\rightarrow C\models^{m'}F,\xi\models^m\models^{m'},a_j\dots a_n)\end{array}$$

$$\frac{[-,- \mid B,i,\models^m,\rightarrow C,j,\models^m \mid -,-,-,-,-]m'}{[-,- \mid C,j,\models^m,\models^{m'}F,j,\models^{m'} \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}} \quad (m',C,\epsilon) \longmapsto (\mathbf{w},C\models^{m'}F,\models^{m'})$$

- Derivaciones que son el resultado de aplicar una transición $(\mathbf{w},C,\epsilon) \longmapsto (\mathbf{w},C\rightarrow F,\epsilon)$
  - a una derivación de llamada, con las tres posibilidades siguientes:

$$\begin{array}{ll}(\mathbf{w},\,\Xi A,\xi,a_h\dots a_n) & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\,\Xi A\,\Xi_1 B,\xi\gamma\gamma',a_i\dots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\,\Xi A\,\Xi_1 B\searrow C,\xi\gamma,a_j\dots a_n)\\ & \vdash (\mathbf{w},\,\Xi A\,\Xi_1 B\searrow C\rightarrow F,\xi\gamma,a_j\dots a_n)\end{array}$$

$$\frac{[A,h \mid B,i,\gamma',\searrow C,j,\gamma \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}}{[A,h \mid C,j,\gamma,\rightarrow F,j,\gamma \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}} \quad (\mathbf{w},C,\epsilon) \longmapsto (\mathbf{w},C\rightarrow F,\epsilon)$$

$$\begin{array}{ll}(\mathbf{w},\,\Xi A,\xi,a_h\dots a_n) & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\,\Xi A\,\Xi_1 B,\xi\gamma,a_i\dots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\,\Xi A\,\Xi_1 B\rightarrow C,\xi\gamma,a_j\dots a_n)\\ & \vdash (\mathbf{w},\,\Xi A\,\Xi_1 B\rightarrow C\rightarrow F,\xi\gamma,a_j\dots a_n)\end{array}$$

$$\frac{[A,h \mid B,i,\gamma,\rightarrow C,j,\gamma \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}}{[A,h \mid C,j,\gamma,\rightarrow F,j,\gamma \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}} \quad (\mathbf{w},C,\epsilon) \longmapsto (\mathbf{w},C\rightarrow F,\epsilon)$$

$$\begin{array}{ll}(\mathbf{w},\,\Xi B,\xi\gamma',a_i\dots a_n) & \overset{0}{\vdash} (\mathbf{w},\,\Xi B,\xi\gamma',a_i\dots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\,\Xi B\nearrow C,\xi\gamma'\gamma,a_j\dots a_n)\\ & \vdash (\mathbf{w},\,\Xi B\nearrow C\rightarrow F,\xi\gamma'\gamma,a_j\dots a_n)\end{array}$$

$$\frac{[B,i \mid B,i,\gamma',\nearrow C,j,\gamma \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}}{[B,i \mid C,j,\gamma,\rightarrow F,j,\gamma \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}} \quad (\mathbf{w},C,\epsilon) \longmapsto (\mathbf{w},C\rightarrow F,\epsilon)$$

– a una derivación de puntos especiales, con las tres posibilidades siguientes:

$$\begin{array}{ll}(m,\ \Xi B, \xi\gamma', a_i \ldots a_n) & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\ \Xi B{\models^m}C, \xi\gamma'{\models^m}, a_j \ldots a_n) \\ & \vdash (\mathbf{w},\ \Xi B{\models^m}C{\rightarrow}F, \xi\gamma'{\models^m}, a_j \ldots a_n)\end{array}$$

$$\frac{[-,- \mid B,i,\gamma',{\models^m}C,j,{\models^m} \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}}{[-,- \mid C,j,{\models^m},{\rightarrow}F,j,{\models^m} \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}} \quad (\mathbf{w},C,\epsilon) \longmapsto (\mathbf{w},C{\rightarrow}F,\epsilon)$$

$$\begin{array}{ll}(\mathbf{w},\ \Xi B, \xi{\models^m}\gamma, a_i \ldots a_n) & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\ \Xi B{\searrow}C, \xi{\models^m}, a_j \ldots a_n) \\ & \vdash (\mathbf{w},\ \Xi B{\searrow}C{\rightarrow}F, \xi{\models^m}, a_j \ldots a_n)\end{array}$$

$$\frac{[-,- \mid B,i,\gamma,{\searrow}C,j,{\models^m} \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}}{[-,- \mid C,j,{\models^m},{\rightarrow}F,j,{\models^m} \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}} \quad (\mathbf{w},C,\epsilon) \longmapsto (\mathbf{w},C{\rightarrow}F,\epsilon)$$

$$\begin{array}{ll}(\mathbf{w},\ \Xi B, \xi{\models^m}, a_i \ldots a_n) & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\ \Xi B{\rightarrow}C, \xi{\models^m}, a_j \ldots a_n) \\ & \vdash (\mathbf{w},\ \Xi B{\rightarrow}C{\rightarrow}F, \xi{\models^m}, a_j \ldots a_n)\end{array}$$

$$\frac{[-,- \mid B,i,{\models^m},{\rightarrow}C,j,{\models^m} \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}}{[-,- \mid C,j,{\models^m},{\rightarrow}F,j,{\models^m} \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}} \quad (\mathbf{w},C,\epsilon) \longmapsto (\mathbf{w},C{\rightarrow}F,\epsilon)$$

- Derivaciones que son el resultado de aplicar una transición $(\mathbf{w},C,\epsilon) \longmapsto (\mathbf{w},C{\nearrow}F,\gamma')$
  – a una derivación de llamada, con las tres posibilidades siguientes:

$$\begin{array}{ll}(\mathbf{w},\ \Xi A, \xi, a_h \ldots a_n) & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\ \Xi A\,\Xi_1 B, \xi\gamma\gamma'', a_i \ldots a_n) \\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\ \Xi A\,\Xi_1 B{\searrow}C, \xi\gamma, a_j \ldots a_n) \\ & \vdash (\mathbf{w},\ \Xi A\,\Xi_1 B{\searrow}C{\nearrow}F, \xi\gamma\gamma', a_j \ldots a_n)\end{array}$$

$$\frac{[A,h \mid B,i,\gamma'',{\searrow}C,j,\gamma \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}}{[C,j \mid C,j,\gamma,{\nearrow}F,j,\gamma' \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}} \quad (\mathbf{w},C,\epsilon) \longmapsto (\mathbf{w},C{\nearrow}F,\gamma')$$

$$\begin{array}{ll}(\mathbf{w},\ \Xi A, \xi, a_h \ldots a_n) & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\ \Xi A\,\Xi_1 B, \xi\gamma, a_i \ldots a_n) \\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\ \Xi A\,\Xi_1 B{\rightarrow}C, \xi\gamma, a_j \ldots a_n) \\ & \vdash (\mathbf{w},\ \Xi A\,\Xi_1 B{\rightarrow}C{\nearrow}F, \xi\gamma\gamma', a_j \ldots a_n)\end{array}$$

$$\frac{[A,h \mid B,i,\gamma,{\rightarrow}C,j,\gamma \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}}{[C,j \mid C,j,\gamma,{\nearrow}F,j,\gamma' \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}} \quad (\mathbf{w},C,\epsilon) \longmapsto (\mathbf{w},C{\nearrow}F,\gamma')$$

$$\begin{array}{ll}(\mathbf{w},\ \Xi B, \xi\gamma'', a_i \ldots a_n) & \overset{0}{\vdash} (\mathbf{w},\ \Xi B, \xi\gamma'', a_i \ldots a_n) \\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\ \Xi B{\nearrow}C, \xi\gamma''\gamma, a_j \ldots a_n) \\ & \vdash (\mathbf{w},\ \Xi B{\nearrow}C{\nearrow}F, \xi\gamma''\gamma\gamma', a_j \ldots a_n)\end{array}$$

$$\frac{[B,i \mid B,i,\gamma'',{\nearrow}C,j,\gamma \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}}{[C,j \mid C,j,\gamma,{\nearrow}F,j,\gamma' \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}} \quad (\mathbf{w},C,\epsilon) \longmapsto (\mathbf{w},C{\nearrow}F,\gamma')$$

  – a una derivación de puntos especiales, con las tres posibilidades siguientes:

$$\begin{array}{ll}(m,\ \Xi B, \xi\gamma'', a_i \ldots a_n) & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\ \Xi B{\models^m}C, \xi\gamma''{\models^m}, a_j \ldots a_n) \\ & \vdash (\mathbf{w},\ \Xi B{\models^m}C{\nearrow}F, \xi\gamma''{\models^m}\gamma', a_j \ldots a_n)\end{array}$$

$$\frac{[-,- \mid B,i,\gamma'',{\models^m}C,j,{\models^m} \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}}{[C,j \mid C,j,{\models^m},{\nearrow}F,j,\gamma' \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}} \quad (\mathbf{w},C,\epsilon) \longmapsto (\mathbf{w},C{\nearrow}F,\gamma')$$

$$\begin{array}{ll}(\mathbf{w},\, \Xi B, \xi{\models^m}\gamma, a_i \ldots a_n) & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\, \Xi B{\searrow}C, \xi{\models^m}, a_j \ldots a_n) \\ & \vdash (\mathbf{w},\, \Xi B{\searrow}C{\nearrow}F, \xi{\models^m}\gamma', a_j \ldots a_n)\end{array}$$

$$\frac{[-,- \mid B, i, \gamma, {\searrow}C, j, {\models^m} \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}}{[C, j \mid C, j, {\models^m}, {\nearrow}F, j, \gamma' \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}} \;\; (\mathbf{w}, C, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{w}, C{\nearrow}F, \gamma')$$

$$\begin{array}{ll}(\mathbf{w},\, \Xi B, \xi{\models^m}, a_i \ldots a_n) & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\, \Xi B{\to}C, \xi{\models^m}, a_j \ldots a_n) \\ & \vdash (\mathbf{w},\, \Xi B{\to}C{\nearrow}F, \xi{\models^m}\gamma', a_j \ldots a_n)\end{array}$$

$$\frac{[-,- \mid B, i, {\models^m}, {\to}C, j, {\models^m} \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}}{[C, j \mid C, j, {\models^m}, {\nearrow}F, j, \gamma' \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}} \;\; (\mathbf{w}, C, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{w}, C{\nearrow}F, \gamma')$$

- Derivaciones que son el resultado de aplicar una transición $(\mathbf{w}, C, \gamma) \longmapsto (\mathbf{w}, C{\searrow}F, \epsilon)$ a una derivación de llamada, con las tres posibilidades siguientes:

$$\begin{array}{ll}(\mathbf{w},\, \Xi M, \xi, a_m \ldots a_n) & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\, \Xi M\, \Xi_1 N, \xi'\gamma''', a_t \ldots a_n) \\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\, \Xi M\, \Xi_1 N \otimes A, \xi\gamma', a_h \ldots a_n) \\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\, \Xi M\, \Xi_1 N \otimes A\, \Xi_2 B, \xi\gamma'\gamma\gamma'', a_i \ldots a_n) \\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\, \Xi M\, \Xi_1 N \otimes A\, \Xi_2 B{\searrow}C, \xi\gamma'\gamma, a_j \ldots a_n) \\ & \vdash (\mathbf{w},\, \Xi M\, \Xi_1 N \otimes A\, \Xi_2 B{\searrow}C{\searrow}F, \xi\gamma', a_j \ldots a_n)\end{array}$$

$$\frac{\begin{array}{c}[A, h \mid B, i, \gamma'', {\searrow}C, j, \gamma \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w} \\ [M, m \mid N, t, \gamma''', {\otimes}A, h, \gamma' \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}\end{array}}{[M, m \mid C, j, \gamma, {\searrow}F, j, \gamma' \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}} \;\; (\mathbf{w}, C, \gamma) \longmapsto (\mathbf{w}, C{\searrow}F, \epsilon)$$

$$\begin{array}{ll}(\mathbf{w},\, \Xi M, \xi, a_m \ldots a_n) & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\, \Xi M\, \Xi_1 N, \xi'\gamma''', a_t \ldots a_n) \\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\, \Xi M\, \Xi_1 N \otimes A, \xi\gamma', a_h \ldots a_n) \\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\, \Xi M\, \Xi_1 N \otimes A\, \Xi_2 B, \xi\gamma'\gamma, a_i \ldots a_n) \\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\, \Xi M\, \Xi_1 N \otimes A\, \Xi_2 B{\to}C, \xi\gamma'\gamma, a_j \ldots a_n) \\ & \vdash (\mathbf{w},\, \Xi M\, \Xi_1 N \otimes A\, \Xi_2 B{\to}C{\searrow}F, \xi\gamma', a_j \ldots a_n)\end{array}$$

$$\frac{\begin{array}{c}[A, h \mid B, i, \gamma'', {\to}C, j, \gamma \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w} \\ [M, m \mid N, t, \gamma''', {\otimes}A, h, \gamma' \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}\end{array}}{[M, m \mid C, j, \gamma, {\searrow}F, j, \gamma' \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}} \;\; (\mathbf{w}, C, \gamma) \longmapsto (\mathbf{w}, C{\searrow}F, \epsilon)$$

$$\begin{array}{ll}(\mathbf{w},\, \Xi M, \xi, a_m \ldots a_n) & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\, \Xi M\, \Xi_1 N, \xi'\gamma''', a_t \ldots a_n) \\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\, \Xi M\, \Xi_1 N \otimes B, \xi\gamma', a_h \ldots a_n) \\ & \overset{0}{\vdash} (\mathbf{w},\, \Xi M\, \Xi_1 N \otimes B, \xi\gamma', a_i \ldots a_n) \\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\, \Xi M\, \Xi_1 N \otimes B{\nearrow}C, \xi\gamma'\gamma, a_j \ldots a_n) \\ & \vdash (\mathbf{w},\, \Xi M\, \Xi_1 N \otimes B{\nearrow}C{\searrow}F, \xi\gamma', a_j \ldots a_n)\end{array}$$

$$\frac{\begin{array}{c}[B, i \mid B, i, \gamma', {\nearrow}C, j, \gamma \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w} \\ [M, m \mid N, t, \gamma''', {\otimes}B, i, \gamma' \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}\end{array}}{[M, m \mid C, j, \gamma, {\searrow}F, j, \gamma' \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}} \;\; (\mathbf{w}, C, \gamma) \longmapsto (\mathbf{w}, C{\searrow}F, \epsilon)$$

- Derivaciones que son el resultado de aplicar una transición $(\mathbf{w}, C, \models^m) \overset{a}{\longmapsto} (\mathbf{e}, F, \models^m)$ a una derivación de puntos especiales, con los tres casos siguientes, en los cuales $k = j$ si $a = \epsilon$ y $k = j + 1$ si $a \in V_T$:

$$\begin{array}{ll}(m, \Xi B, \xi\gamma', a_i \ldots a_n) & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w}, \Xi B {\models^m} C, \xi\gamma' {\models^m}, a_j \ldots a_n) \\ & \vdash (\mathbf{e}, \Xi B {\models^m} F, \xi\gamma' {\models^m}, a_j \ldots a_n)\end{array}$$

$$\frac{[-,- \mid B, i, \gamma', \models^m C, j, \models^m \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}}{[-,- \mid B, i, \gamma', \models^m F, k, \models^m \mid -,-,-,-,-]\mathbf{e}} \quad (\mathbf{w}, C, \models^m) \overset{a}{\longmapsto} (\mathbf{e}, F, \models^m)$$

$$\begin{array}{ll}(\mathbf{w}, \Xi B, \xi {\models^m} \gamma, a_i \ldots a_n) & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w}, \Xi B {\searrow} C, \xi {\models^m}, a_j \ldots a_n) \\ & \vdash (\mathbf{e}, \Xi B {\searrow} F, \xi {\models^m}, a_j \ldots a_n)\end{array}$$

$$\frac{[-,- \mid B, i, \gamma, \searrow C, j, \models^m \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}}{[-,- \mid B, i, \gamma, \searrow F, k, \models^m \mid -,-,-,-,-]\mathbf{e}} \quad (\mathbf{w}, C, \models^m) \overset{a}{\longmapsto} (\mathbf{e}, F, \models^m)$$

$$\begin{array}{ll}(\mathbf{w}, \Xi B, \xi {\models^m}, a_i \ldots a_n) & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w}, \Xi B {\rightarrow} C, \xi {\models^m}, a_j \ldots a_n) \\ & \vdash (\mathbf{e}, \Xi B {\rightarrow} F, \xi {\models^m}, a_j \ldots a_n)\end{array}$$

$$\frac{[-,- \mid B, i, \models^m, \rightarrow C, j, \models^m \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}}{[-,- \mid B, i, \models^m, \rightarrow F, k, \models^m \mid -,-,-,-,-]\mathbf{e}} \quad (\mathbf{w}, C, \models^m) \overset{a}{\longmapsto} (\mathbf{e}, F, \models^m)$$

- Derivaciones que son el resultado de aplicar una transición $(\mathbf{e}, C {\models^m} F, \models^m) \longmapsto (m, G, \epsilon)$ a una derivación obtenida tras aplicar una transición $(m, C, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{w}, C {\models^m} F', \models^m)$
  - a una derivación de llamada, con los tres casos siguientes:

$$\begin{array}{ll}(\mathbf{w}, \Xi A, \xi, a_h \ldots a_n) & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w}, \Xi A\, \Xi_1 B, \xi\gamma\gamma', a_i \ldots a_n) \\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w}, \Xi A\, \Xi_1 B {\searrow} C, \xi\gamma, a_j \ldots a_n) \\ & \vdash (\mathbf{w}, \Xi A\, \Xi_1 B {\searrow} C {\models^{\mathbf{w}}} F', \xi\gamma {\models^{\mathbf{w}}}, a_j \ldots a_n) \\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e}, \Xi A\, \Xi_1 B {\searrow} C {\models^{\mathbf{w}}} F, \xi\gamma {\models^{\mathbf{w}}}, a_k \ldots a_n) \\ & \vdash (\mathbf{w}, \Xi A\, \Xi_1 B {\searrow} G, \xi\gamma, a_k \ldots a_n)\end{array}$$

$$\frac{\begin{array}{c}[-,- \mid C, j, \gamma, \models^{\mathbf{w}} F, k, \models^{\mathbf{w}} \mid -,-,-,-,-]\mathbf{e} \\ {[A, h \mid B, i, \gamma', \searrow C, j, \gamma \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}}\end{array}}{[A, h \mid B, i, \gamma', \searrow G, k, \gamma \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}} \quad (\mathbf{e}, C {\models^{\mathbf{w}}} F, \models^{\mathbf{w}}) \longmapsto (\mathbf{w}, G, \epsilon)$$

$$\begin{array}{ll}(\mathbf{w}, \Xi A, \xi, a_h \ldots a_n) & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w}, \Xi A\, \Xi_1 B, \xi\gamma, a_i \ldots a_n) \\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w}, \Xi A\, \Xi_1 B {\rightarrow} C, \xi\gamma, a_j \ldots a_n) \\ & \vdash (\mathbf{w}, \Xi A\, \Xi_1 B {\rightarrow} C {\models^{\mathbf{w}}} F', \xi\gamma {\models^{\mathbf{w}}}, a_j \ldots a_n) \\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e}, \Xi A\, \Xi_1 B {\rightarrow} C {\models^{\mathbf{w}}} F, \xi\gamma {\models^{\mathbf{w}}}, a_k \ldots a_n) \\ & \vdash (\mathbf{w}, \Xi A\, \Xi_1 B {\rightarrow} G, \xi\gamma, a_k \ldots a_n)\end{array}$$

$$\frac{\begin{array}{c}[-,- \mid C, j, \gamma, \models^{\mathbf{w}} F, k, \models^{\mathbf{w}} \mid -,-,-,-,-]\mathbf{e} \\ {[A, h \mid B, i, \gamma, \rightarrow C, j, \gamma \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}}\end{array}}{[A, h \mid B, i, \gamma, \rightarrow G, k, \gamma \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}} \quad (\mathbf{e}, C {\models^{\mathbf{w}}} F, \models^{\mathbf{w}}) \longmapsto (\mathbf{w}, G, \epsilon)$$

$$\begin{array}{ll}(\mathbf{w}, \Xi B, \xi\gamma', a_i \ldots a_n) & \overset{0}{\vdash} (\mathbf{w}, \Xi B, \xi\gamma', a_i \ldots a_n) \\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w}, \Xi B {\nearrow} C, \xi\gamma'\gamma, a_j \ldots a_n) \\ & \vdash (\mathbf{w}, \Xi B {\nearrow} C {\models^{\mathbf{w}}} F', \xi\gamma'\gamma {\models^{\mathbf{w}}}, a_j \ldots a_n) \\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e}, \Xi B {\nearrow} C {\models^{\mathbf{w}}} F, \xi\gamma'\gamma {\models^{\mathbf{w}}}, a_k \ldots a_n) \\ & \vdash (\mathbf{w}, \Xi B {\nearrow} G, \xi\gamma'\gamma, a_k \ldots a_n)\end{array}$$

$$\frac{\begin{array}{c}[-,- \mid C,j,\gamma,\models^{\mathbf{w}}F,k,\models^{\mathbf{w}} \mid -,-,-,-,-]\mathbf{e}\\ [B,i \mid B,i,\gamma',\nearrow C,j,\gamma \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}\end{array}}{[B,i \mid B,i,\gamma',\nearrow G,k,\gamma \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}} \quad (\mathbf{e},C\models^{\mathbf{w}}F,\models^{\mathbf{w}}) \longmapsto (\mathbf{w},G,\epsilon)$$

– a una derivación de retorno, con las tres posibilidades siguientes:

$$\begin{array}{ll}(\mathbf{w},\,\Xi A,\xi,a_h\ldots a_n) & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\,\Xi A\,\Xi_1 B,\xi\gamma\gamma',a_i\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\,\Xi A\,\Xi_1 B\,\Xi_2 D,\xi\gamma,a_p\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e},\,\Xi A\,\Xi_1 B\,\Xi_2 D\searrow E,\phi,a_q\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e},\,\Xi A\,\Xi_1 B\searrow C,\phi\eta,a_j\ldots a_n)\\ & \vdash (\mathbf{w},\,\Xi A\,\Xi_1 B\searrow C\models^{\mathbf{e}}F',\phi\eta\models^{\mathbf{e}},a_j\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e},\,\Xi A\,\Xi_1 B\searrow C\models^{\mathbf{e}}F,\phi\eta\models^{\mathbf{e}},a_k\ldots a_n)\\ & \vdash (\mathbf{e},\,\Xi A\,\Xi_1 B\searrow G,\phi\eta,a_k\ldots a_n)\end{array}$$

$$\frac{\begin{array}{c}[-,- \mid C,j,\eta,\models^{\mathbf{e}}F,k,\models^{\mathbf{e}} \mid -,-,-,-,-]\mathbf{e}\\ [A,h \mid B,i,\gamma',\searrow C,j,\eta \mid D,p,\gamma,E,q]\mathbf{e}\end{array}}{[A,h \mid B,i,\gamma',\searrow G,k,\eta \mid D,p,\gamma,E,q]\mathbf{e}} \quad (\mathbf{e},C\models^{\mathbf{e}}F,\models^{\mathbf{e}}) \longmapsto (\mathbf{e},G,\epsilon)$$

$$\begin{array}{ll}(\mathbf{w},\,\Xi A,\xi,a_h\ldots a_n) & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\,\Xi A\,\Xi_1 B,\xi\gamma,a_i\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\,\Xi A\,\Xi_1 B\,\Xi_2 D,\xi\gamma,a_p\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e},\,\Xi A\,\Xi_1 B\,\Xi_2 D\searrow E,\phi,a_q\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e},\,\Xi A\,\Xi_1 B\rightarrow C,\phi\eta,a_j\ldots a_n)\\ & \vdash (\mathbf{w},\,\Xi A\,\Xi_1 B\rightarrow C\models^{\mathbf{e}}F',\phi\eta\models^{\mathbf{e}},a_j\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e},\,\Xi A\,\Xi_1 B\rightarrow C\models^{\mathbf{e}}F,\phi\eta\models^{\mathbf{e}},a_k\ldots a_n)\\ & \vdash (\mathbf{e},\,\Xi A\,\Xi_1 B\rightarrow G,\phi\eta,a_k\ldots a_n)\end{array}$$

$$\frac{\begin{array}{c}[-,- \mid C,j,\eta,\models^{\mathbf{e}}F,k,\models^{\mathbf{e}} \mid -,-,-,-,-]\mathbf{e}\\ [A,h \mid B,i,\gamma,\rightarrow C,j,\eta \mid D,p,\gamma,E,q]\mathbf{e}\end{array}}{[A,h \mid B,i,\gamma,\rightarrow G,k,\eta \mid D,p,\gamma,E,q]\mathbf{e}} \quad (\mathbf{e},C\models^{\mathbf{e}}F,\models^{\mathbf{e}}) \longmapsto (\mathbf{e},G,\epsilon)$$

$$\begin{array}{ll}(\mathbf{w},\,\Xi B,\xi\gamma',a_i\ldots a_n) & \overset{0}{\vdash} (\mathbf{w},\,\Xi B,\xi\gamma',a_i\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\,\Xi B\,\Xi_2 D,\xi\gamma'\gamma,a_p\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e},\,\Xi B\,\Xi_2 D\searrow E,\phi\eta',a_q\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e},\,\Xi B\nearrow C,\phi\eta'\eta,a_j\ldots a_n)\\ & \vdash (\mathbf{w},\,\Xi B\nearrow C\models^{\mathbf{e}}F',\phi\eta'\eta\models^{\mathbf{e}},a_j\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e},\,\Xi B\nearrow C\models^{\mathbf{e}}F,\phi\eta'\eta\models^{\mathbf{e}},a_k\ldots a_n)\\ & \vdash (\mathbf{e},\,\Xi B\nearrow G,\phi\eta'\eta,a_k\ldots a_n)\end{array}$$

$$\frac{\begin{array}{c}[-,- \mid C,j,\eta,\models^{\mathbf{e}}F,k,\models^{\mathbf{e}} \mid -,-,-,-,-]\mathbf{e}\\ [B,i \mid B,i,\gamma',\nearrow C,j,\eta \mid D,p,\gamma,E,q]\mathbf{e}\end{array}}{[B,i \mid B,i,\gamma',\nearrow G,k,\eta \mid D,p,\gamma,E,q]\mathbf{e}} \quad (\mathbf{e},C\models^{\mathbf{e}}F,\models^{\mathbf{e}}) \longmapsto (\mathbf{e},G,\epsilon)$$

– a una derivación de puntos especiales, con las tres posibilidades siguientes:

$$\begin{array}{ll}(m,\,\Xi B,\xi\gamma',a_i\ldots a_n) & \overset{*}{\vdash} (m',\,\Xi B\models^m C,\xi\gamma'\models^m,a_j\ldots a_n)\\ & \vdash (\mathbf{w},\,\Xi B\models^m C\models^{m'}F',\xi\gamma'\models^m\models^{m'},a_j\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e},\,\Xi B\models^m C\models^{m'}F,\xi\gamma'\models^m\models^{m'},a_k\ldots a_n)\\ & \vdash (m',\,\Xi B\models^m G,\xi\gamma'\models^m,a_k\ldots a_n)\end{array}$$

$$\frac{\begin{array}{c}[-,- \mid C,j,\models^m,\models^{m'}F,k,\models^{m'} \mid -,-,-,-,-]\mathbf{e}\\ [A,h \mid B,i,\gamma',\models^m C,j,\models^m \mid -,-,-,-,-]m'\end{array}}{[A,h \mid B,i,\gamma',\models^m G,k,\models^m \mid -,-,-,-,-]m'}\ (\mathbf{e},C\models^{m'}F,\models^{m'}) \longmapsto (m',G,\epsilon)$$

$$\begin{array}{ll}(\mathbf{w},\,\Xi B,\xi\models^m\gamma,a_i\ldots a_n) & \overset{*}{\vdash} (m',\,\Xi B\searrow C,\xi\models^m,a_j\ldots a_n)\\ & \vdash (\mathbf{w},\,\Xi B\searrow C\models^{m'}F',\xi\models^m\models^{m'},a_j\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e},\,\Xi B\searrow C\models^{m'}F,\xi\models^m\models^{m'},a_k\ldots a_n)\\ & \vdash (m',\,\Xi B\searrow C\models^m F,\xi\models^m\models^m,a_k\ldots a_n)\end{array}$$

$$\frac{\begin{array}{c}[-,- \mid C,j,\models^m,\models^{m'}F,k,\models^{m'} \mid -,-,-,-,-]\mathbf{e}\\ [A,h \mid B,i,\gamma,\searrow C,j,\models^m \mid -,-,-,-,-]m'\end{array}}{[A,h \mid B,i,\gamma,\searrow G,k,\models^m \mid -,-,-,-,-]m'}\ (\mathbf{e},C\models^{m'}F,\models^{m'}) \longmapsto (m',G,\epsilon)$$

$$\begin{array}{ll}(\mathbf{w},\,\Xi B,\xi\models^m,a_i\ldots a_n) & \overset{*}{\vdash} (m',\,\Xi B\rightarrow C,\xi\models^m,a_j\ldots a_n)\\ & \vdash (\mathbf{w},\,\Xi B\rightarrow C\models^{m'}F',\xi\models^m\models^{m'},a_j\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e},\,\Xi B\rightarrow C\models^{m'}F,\xi\models^m\models^{m'},a_k\ldots a_n)\\ & \vdash (m',\,\Xi B\rightarrow C\models^m F,\xi\models^m\models^m,a_k\ldots a_n)\end{array}$$

$$\frac{\begin{array}{c}[-,- \mid C,j,\models^m,\models^{m'}F,k,\models^{m'} \mid -,-,-,-,-]\mathbf{e}\\ [A,h \mid B,i,\models^m,\rightarrow C,j,\models^m \mid -,-,-,-,-]m'\end{array}}{[A,h \mid B,i,\models^m,\rightarrow G,k,\models^m \mid -,-,-,-,-]m'}\ (\mathbf{e},C\models^{m'}F,\models^{m'}) \longmapsto (m',G,\epsilon)$$

- Derivaciones que son el resultado de aplicar una transición $(\mathbf{e},C\rightarrow F,\epsilon) \longmapsto (\mathbf{e},G,\epsilon)$ a una derivación obtenida tras aplicar una transición $(\mathbf{w},C,\epsilon) \longmapsto (\mathbf{w},C\rightarrow F',\epsilon)$
  - a una derivación de llamada, con las tres posibilidades siguientes:

$$\begin{array}{ll}(\mathbf{w},\,\Xi A,\xi,a_h\ldots a_n) & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\,\Xi A\,\Xi_1 B,\xi\gamma\gamma',a_i\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\,\Xi A\,\Xi_1 B\searrow C,\xi\gamma,a_j\ldots a_n)\\ & \vdash (\mathbf{w},\,\Xi A\,\Xi_1 B\searrow C\rightarrow F',\xi\gamma,a_j\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\,\Xi A\,\Xi_1 B\searrow C\rightarrow F'\,\Xi_2 D,\xi\gamma,a_p\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e},\,\Xi A\,\Xi_1 B\searrow C\rightarrow F'\,\Xi_2 D\searrow E,\phi,a_q\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e},\,\Xi A\,\Xi_1 B\searrow C\rightarrow F,\phi\eta,a_k\ldots a_n)\\ & \vdash (\mathbf{e},\,\Xi A\,\Xi_1 B\searrow G,\phi\eta,a_k\ldots a_n)\end{array}$$

$$\frac{\begin{array}{c}[A,h \mid C,j,\gamma,\rightarrow F,k,\eta \mid D,p,\gamma,E,q]\mathbf{e}\\ [A,h \mid B,i,\gamma',\searrow C,j,\gamma \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}\end{array}}{[A,h \mid B,i,\gamma',\searrow G,k,\eta \mid D,p,\gamma,E,q]\mathbf{e}}\ (\mathbf{e},C\rightarrow F,\epsilon) \longmapsto (\mathbf{e},G,\epsilon)$$

$$\begin{array}{ll}(\mathbf{w},\,\Xi A,\xi,a_h\ldots a_n) & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\,\Xi A\,\Xi_1 B,\xi\gamma,a_i\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\,\Xi A\,\Xi_1 B\rightarrow C,\xi\gamma,a_j\ldots a_n)\\ & \vdash (\mathbf{w},\,\Xi A\,\Xi_1 B\rightarrow C\rightarrow F',\xi\gamma,a_j\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\,\Xi A\,\Xi_1 B\rightarrow C\rightarrow F'\Xi_2 D,\xi\gamma,a_p\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e},\,\Xi A\,\Xi_1 B\rightarrow C\rightarrow F'\,\Xi_2 D\searrow E,\phi,a_j\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e},\,\Xi A\,\Xi_1 B\rightarrow C\rightarrow F,\phi\eta,a_k\ldots a_n)\\ & \vdash (\mathbf{e},\,\Xi A\,\Xi_1 B\rightarrow G,\phi\eta,a_k\ldots a_n)\end{array}$$

$$\frac{\begin{array}{c}[A,h \mid C,j,\gamma,\rightarrow F,k,\eta \mid D,p,\gamma,E,q]\mathbf{e}\\ [A,h \mid B,i,\gamma,\rightarrow C,j,\gamma \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}\end{array}}{[A,h \mid B,i,\gamma,\rightarrow G,k,\eta \mid D,p,\gamma,E,q]\mathbf{e}}\ (\mathbf{e},C\rightarrow F,\epsilon) \longmapsto (\mathbf{e},G,\epsilon)$$

$$\begin{array}{ll} (\mathbf{w}, \Xi B, \xi\gamma', a_i \ldots a_n) & \overset{0}{\vdash} (\mathbf{w}, \Xi B, \xi\gamma', a_i \ldots a_n) \\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w}, \Xi B \nearrow C, \xi\gamma'\gamma, a_j \ldots a_n) \\ & \vdash (\mathbf{w}, \Xi B \nearrow C \rightarrow F', \xi\gamma'\gamma, a_j \ldots a_n) \\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w}, \Xi B \nearrow C \rightarrow F' \, \Xi_2 D, \xi\gamma'\gamma, a_p \ldots a_n) \\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e}, \Xi B \nearrow C \rightarrow F' \, \Xi_2 D \searrow E, \phi\eta', a_q \ldots a_n) \\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e}, \Xi B \nearrow C \rightarrow F, \phi\eta'\eta, a_k \ldots a_n) \\ & \vdash (\mathbf{e}, \Xi B \nearrow G, \phi\eta'\eta, a_k \ldots a_n) \end{array}$$

$$\frac{\begin{array}{c}[B, i \mid C, j, \gamma, \rightarrow F, k, \eta \mid D, p, \gamma, E, q]\mathbf{e} \\ [B, i \mid B, i, \gamma', \nearrow C, j, \gamma \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}\end{array}}{[B, i \mid B, i, \gamma', \nearrow G, k, \eta \mid D, p, \gamma, E, q]\mathbf{e}} \quad (\mathbf{e}, C \rightarrow F, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{e}, G, \epsilon)$$

– a una derivación de puntos especiales, con las tres posibilidades siguientes:

$$\begin{array}{ll} (m, \Xi B, \xi\gamma', a_i \ldots a_n) & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w}, \Xi B \models^m C, \xi\gamma' \models^m, a_j \ldots a_n) \\ & \vdash (\mathbf{w}, \Xi B \models^m C \rightarrow F', \xi\gamma' \models^m, a_j \ldots a_n) \\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e}, \Xi B \models^m C \rightarrow F, \xi\gamma' \models^m, a_k \ldots a_n) \\ & \vdash (\mathbf{e}, \Xi B \models^m G, \xi\gamma' \models^m, a_k \ldots a_n) \end{array}$$

$$\frac{\begin{array}{c}[-,- \mid C, j, \models^m, \rightarrow F, k, \models^m \mid -,-,-,-,-]\mathbf{e} \\ [-,- \mid B, i, \gamma', \models^m C, j, \models^m \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}\end{array}}{[-,- \mid B, i, \gamma', \models^m G, k, \models^m \mid -,-,-,-,-]\mathbf{e}} \quad (\mathbf{e}, C \rightarrow F, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{e}, G, \epsilon)$$

$$\begin{array}{ll} (\mathbf{w}, \Xi B, \xi \models^m \gamma, a_i \ldots a_n) & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w}, \Xi B \searrow C, \xi \models^m, a_j \ldots a_n) \\ & \vdash (\mathbf{w}, \Xi B \searrow C \rightarrow F', \xi \models^m, a_j \ldots a_n) \\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e}, \Xi B \searrow C \rightarrow F, \xi \models^m, a_k \ldots a_n) \\ & \vdash (\mathbf{e}, \Xi B \searrow G, \xi \models^m, a_k \ldots a_n) \end{array}$$

$$\frac{\begin{array}{c}[-,- \mid C, j, \models^m, \rightarrow F, k, \models^m \mid -,-,-,-,-]\mathbf{e} \\ [-,- \mid B, i, \gamma, \searrow C, j, \models^m \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}\end{array}}{[-,- \mid B, i, \gamma, \searrow G, k, \models^m \mid -,-,-,-,-]\mathbf{e}} \quad (\mathbf{e}, C \rightarrow F, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{e}, G, \epsilon)$$

$$\begin{array}{ll} (\mathbf{w}, \Xi B, \xi \models^m, a_i \ldots a_n) & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w}, \Xi B \rightarrow C, \xi \models^m, a_j \ldots a_n) \\ & \vdash (\mathbf{w}, \Xi B \rightarrow C \rightarrow F', \xi \models^m, a_j \ldots a_n) \\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e}, \Xi B \rightarrow C \rightarrow F, \xi \models^m, a_k \ldots a_n) \\ & \vdash (\mathbf{e}, \Xi B \rightarrow G, \xi \models^m, a_k \ldots a_n) \end{array}$$

$$\frac{\begin{array}{c}[-,- \mid C, j, \models^m, \rightarrow F, k, \models^m \mid -,-,-,-,-]\mathbf{e} \\ [-,- \mid B, i, \models^m, \rightarrow C, j, \models^m \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}\end{array}}{[-,- \mid B, i, \models^m, \rightarrow G, k, \models^m \mid -,-,-,-,-]\mathbf{e}} \quad (\mathbf{e}, C \rightarrow F, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{e}, G, \epsilon)$$

- Derivaciones que son el resultado de aplicar una transición $(\mathbf{e}, C \nearrow F, \eta') \longmapsto (\mathbf{e}, G, \epsilon)$ a una derivación obtenida tras aplicar una transición $(\mathbf{w}, C, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{w}, C \nearrow F', \gamma')$

– a una derivación de llamada, con los tres casos siguientes:

$$
\begin{array}{ll}
(\mathbf{w},\, \Xi A, \xi, a_h \ldots a_n) & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\, \Xi A\, \Xi_1 B, \xi\gamma\gamma'', a_i \ldots a_n) \\
& \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\, \Xi A\, \Xi_1 B{\searrow}C, \xi\gamma, a_j \ldots a_n) \\
& \vdash (\mathbf{w},\, \Xi A\, \Xi_1 B{\searrow}C{\nearrow}F', \xi\gamma\gamma', a_j \ldots a_n) \\
& \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\, \Xi A\, \Xi_1 B{\searrow}C{\nearrow}F'\, \Xi_2 D, \xi\gamma\gamma', a_p \ldots a_n) \\
& \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\, \Xi A\, \Xi_1 B{\searrow}C{\nearrow}F'\, \Xi_2 D\, \Xi_3 O, \xi\gamma, u \ldots a_n) \\
& \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e},\, \Xi A\, \Xi_1 B{\searrow}C{\nearrow}F'\, \Xi_2 D\, \Xi_3 O{\searrow}P, \phi, v \ldots a_n) \\
& \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e},\, \Xi A\, \Xi_1 B{\searrow}C{\nearrow}F'\, \Xi_2 D{\searrow}E, \phi\eta, a_q \ldots a_n) \\
& \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e},\, \Xi A\, \Xi_1 B{\searrow}C{\nearrow}F, \phi\eta\eta', a_k \ldots a_n) \\
& \vdash (\mathbf{e},\, \Xi A\, \Xi_1 B{\searrow}G, \phi\eta, a_k \ldots a_n)
\end{array}
$$

$$
\frac{\begin{array}{c}[C, j \mid C, j, \gamma, {\nearrow}F, k, \eta' \mid D, p, \gamma', E, q]\mathbf{e} \\ [A, h \mid B, i, \gamma'', {\searrow}C, j, \gamma \mid -, -, -, -, -]\mathbf{w} \\ [A, h \mid D, p, \gamma', {\searrow}E, q, \eta \mid O, u, \gamma, P, v]\mathbf{e}\end{array}}{[A, h \mid B, i, \gamma'', {\searrow}G, k, \eta \mid O, u, \gamma, P, v]\mathbf{e}} \quad (\mathbf{e}, C{\nearrow}F, \eta') \longmapsto (\mathbf{e}, G, \epsilon)
$$

$$
\begin{array}{ll}
(\mathbf{w},\, \Xi A, \xi, a_h \ldots a_n) & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\, \Xi A\, \Xi_1 B, \xi\gamma, a_i \ldots a_n) \\
& \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\, \Xi A\, \Xi_1 B{\rightarrow}C, \xi\gamma, a_j \ldots a_n) \\
& \vdash (\mathbf{w},\, \Xi A\, \Xi_1 B{\rightarrow}C{\nearrow}F', \xi\gamma\gamma', a_j \ldots a_n) \\
& \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\, \Xi A\, \Xi_1 B{\rightarrow}C{\nearrow}F'\, \Xi_2 D, \xi\gamma\gamma', a_j \ldots a_n) \\
& \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\, \Xi A\, \Xi_1 B{\rightarrow}C{\nearrow}F'\, \Xi_2 D\, \Xi_2 O, \xi\gamma, a_u \ldots a_n) \\
& \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e},\, \Xi A\, \Xi_1 B{\rightarrow}C{\nearrow}F'\, \Xi_2 D\, \Xi_2 O{\searrow}P, \phi, a_v \ldots a_n) \\
& \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e},\, \Xi A\, \Xi_1 B{\rightarrow}C{\nearrow}F'\, \Xi_2 D{\searrow}E, \phi\eta, a_j \ldots a_n) \\
& \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e},\, \Xi A\, \Xi_1 B{\rightarrow}C{\nearrow}F, \phi\eta\eta', a_k \ldots a_n) \\
& \vdash (\mathbf{e},\, \Xi A\, \Xi_1 B{\rightarrow}G, \phi\eta, a_k \ldots a_n)
\end{array}
$$

$$
\frac{\begin{array}{c}[C, j \mid C, j, \gamma, {\nearrow}F, k, \eta' \mid D, p, \gamma', E, q]\mathbf{e} \\ [A, h \mid B, i, \gamma, {\rightarrow}C, j, \gamma \mid -, -, -, -, -]\mathbf{w} \\ [A, h \mid D, p, \gamma', {\searrow}E, q, \eta \mid O, u, \gamma, P, v]\mathbf{e}\end{array}}{[A, h \mid B, i, \gamma, {\rightarrow}G, k, \eta \mid O, u, \gamma, P, v]\mathbf{e}} \quad (\mathbf{e}, C{\nearrow}F, \eta') \longmapsto (\mathbf{e}, G, \epsilon)
$$

$$
\begin{array}{ll}
(\mathbf{w},\, \Xi B, \xi\gamma'', a_i \ldots a_n) & \overset{0}{\vdash} (\mathbf{w},\, \Xi B, \xi\gamma'', a_i \ldots a_n) \\
& \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\, \Xi B{\nearrow}C, \xi\gamma''\gamma, a_j \ldots a_n) \\
& \vdash (\mathbf{w},\, \Xi B{\nearrow}C{\nearrow}F', \xi\gamma''\gamma\gamma', a_j \ldots a_n) \\
& \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\, \Xi B{\nearrow}C{\nearrow}F'\, \Xi_1 D, \xi\gamma''\gamma\gamma', a_p \ldots a_n) \\
& \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\, \Xi B{\nearrow}C{\nearrow}F'\, \Xi_1 D\, \Xi_2 O, \xi\gamma''\gamma, a_u \ldots a_n) \\
& \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e},\, \Xi B{\nearrow}C{\nearrow}F'\, \Xi_1 D\, \Xi_2 O{\searrow}P, \phi\eta'', a_v \ldots a_n) \\
& \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e},\, \Xi B{\nearrow}C{\nearrow}F'\, \Xi_1 D{\searrow}E, \phi\eta''\eta, a_q \ldots a_n) \\
& \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e},\, \Xi B{\nearrow}C{\nearrow}F, \phi\eta''\eta\eta', a_k \ldots a_n) \\
& \vdash (\mathbf{e},\, \Xi B{\nearrow}G, \phi\eta''\eta, a_k \ldots a_n)
\end{array}
$$

$$
\frac{\begin{array}{c}[C, j \mid C, j, \gamma, {\nearrow}F, k, \eta' \mid D, p, \gamma', E, q]\mathbf{e} \\ [B, i \mid B, i, \gamma'', {\nearrow}C, j, \gamma \mid -, -, -, -, -]\mathbf{w} \\ [B, i \mid D, p, \gamma', {\searrow}E, q, \eta \mid O, u, \gamma, P, v]\mathbf{e}\end{array}}{[B, i \mid B, i, \gamma'', {\nearrow}G, k, \eta \mid O, u, \gamma, P, v]\mathbf{e}} \quad (\mathbf{e}, C{\nearrow}F, \eta') \longmapsto (\mathbf{e}, G, \epsilon)
$$

– a una derivación de puntos especiales, con los dos casos siguientes:

$$\begin{array}{ll}(m,\,\Xi B,\xi\gamma'',a_i\ldots a_n) & \overset{*}{\vdash}(\mathbf{w},\,\Xi B{\models^m}C,\xi\gamma''{\models^m},a_j\ldots a_n)\\ & \vdash(\mathbf{w},\,\Xi B{\models^m}C{\nearrow}F',\xi\gamma''{\models^m}\gamma',a_j\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash}(\mathbf{w},\,\Xi B{\models^m}C{\nearrow}F'\,\Xi_1 D,\xi\gamma''{\models^m}\gamma',a_p\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash}(\mathbf{e},\,\Xi B{\models^m}C{\nearrow}F'\,\Xi_1 D{\searrow}E,\xi\gamma''{\models^m},a_q\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash}(\mathbf{e},\,\Xi B{\models^m}C{\nearrow}F,\xi\gamma''{\models^m}\eta',a_k\ldots a_n)\\ & \vdash(\mathbf{e},\,\Xi B{\models^m}G,\xi\gamma''{\models^m},a_k\ldots a_n)\end{array}$$

$$\frac{\begin{array}{l}[C,j\mid C,j,\models^m,\nearrow F,k,\eta'\mid D,p,\gamma',E,q]\mathbf{e}\\ [-,-\mid B,i,\gamma'',\models^m C,j,\models^m\mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}\\ [-,-\mid D,p,\gamma',\searrow E,q,\models^m\mid -,-,-,-,-]\mathbf{e}\end{array}}{[-,-\mid B,i,\gamma'',\models^m G,k,\models^m\mid -,-,-,-,-]\mathbf{e}}\quad(\mathbf{e},C{\nearrow}F,\eta')\longmapsto(\mathbf{e},G,\epsilon)$$

$$\begin{array}{ll}(\mathbf{w},\,\Xi B,\xi{\models^m}\gamma,a_i\ldots a_n) & \overset{*}{\vdash}(\mathbf{w},\,\Xi B{\searrow}C,\xi{\models^m},a_j\ldots a_n)\\ & \vdash(\mathbf{w},\,\Xi B{\searrow}C{\nearrow}F',\xi{\models^m}\gamma',a_j\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash}(\mathbf{w},\,\Xi B{\searrow}C{\nearrow}F'\,\Xi_1 D,\xi{\models^m}\gamma',a_p\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash}(\mathbf{e},\,\Xi B{\searrow}C{\nearrow}F'\,\Xi_1 D{\searrow}E,\xi{\models^m},a_q\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash}(\mathbf{e},\,\Xi B{\searrow}C{\nearrow}F,\xi{\models^m}\eta',a_k\ldots a_n)\\ & \vdash(\mathbf{e},\,\Xi B{\searrow}G,\xi{\models^m},a_k\ldots a_n)\end{array}$$

$$\frac{\begin{array}{l}[C,j\mid C,j,\models^m,\nearrow F,k,\eta'\mid D,p,\gamma',E,q]\mathbf{e}\\ [-,-\mid B,i,\gamma,\searrow C,j,\models^m\mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}\\ [-,-\mid D,p,\gamma',\searrow E,q,\models^m\mid -,-,-,-,-]\mathbf{e}\end{array}}{[-,-\mid B,i,\gamma,\searrow G,k,\models^m\mid -,-,-,-,-]\mathbf{e}}\quad(\mathbf{e},C{\nearrow}F,\eta')\longmapsto(\mathbf{e},G,\epsilon)$$

$$\begin{array}{ll}(\mathbf{w},\,\Xi B,\xi{\models^m},a_i\ldots a_n) & \overset{*}{\vdash}(\mathbf{w},\,\Xi B{\to}C,\xi{\models^m},a_j\ldots a_n)\\ & \vdash(\mathbf{w},\,\Xi B{\to}C{\nearrow}F',\xi{\models^m}\gamma',a_j\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash}(\mathbf{w},\,\Xi B{\to}C{\nearrow}F'\,\Xi_1 D,\xi{\models^m}\gamma',a_p\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash}(\mathbf{e},\,\Xi B{\to}C{\nearrow}F'\,\Xi_1 D{\searrow}E,\xi{\models^m},a_q\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash}(\mathbf{e},\,\Xi B{\to}C{\nearrow}F,\xi{\models^m}\eta',a_k\ldots a_n)\\ & \vdash(\mathbf{e},\,\Xi B{\to}G,\xi{\models^m},a_k\ldots a_n)\end{array}$$

$$\frac{\begin{array}{l}[C,j\mid C,j,\models^m,\nearrow F,k,\eta'\mid D,p,\gamma',E,q]\mathbf{e}\\ [-,-\mid B,i,\models^m,\to C,j,\models^m\mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}\\ [-,-\mid D,p,\gamma',\searrow E,q,\models^m\mid -,-,-,-,-]\mathbf{e}\end{array}}{[-,-\mid B,i,\models^m,\to G,k,\models^m\mid -,-,-,-,-]\mathbf{e}}\quad(\mathbf{e},C{\nearrow}F,\eta')\longmapsto(\mathbf{e},G,\epsilon)$$

- Derivaciones que son el resultado de aplicar una transición $(\mathbf{e},C{\searrow}F,\epsilon)\longmapsto(\mathbf{e},G,\eta)$ a una derivación obtenida tras aplicar una transición $(\mathbf{w},C,\gamma)\longmapsto(\mathbf{w},C{\searrow}F,\epsilon)$ a una derivación de llamada, con los tres casos siguientes:

$$\begin{array}{ll}(\mathbf{w},\,\Xi M,\xi,a_m\ldots a_n) & \overset{*}{\vdash}(\mathbf{w},\,\Xi M\,\Xi_1 N,\xi'\gamma''',a_t\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash}(\mathbf{w},\,\Xi M\,\Xi_1 N\otimes A,\xi\gamma',a_h\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash}(\mathbf{w},\,\Xi M\,\Xi_1 N\otimes A\,\Xi_2 B,\xi\gamma'\gamma\gamma'',a_i\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash}(\mathbf{w},\,\Xi M\,\Xi_1 N\otimes A\,\Xi_2 B{\searrow}C,\xi\gamma'\gamma,a_j\ldots a_n)\\ & \vdash(\mathbf{w},\,\Xi M\,\Xi_1 N\otimes A\,\Xi_2 B{\searrow}C{\searrow}F',\xi\gamma',a_j\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash}(\mathbf{w},\,\Xi M\,\Xi_1 N\otimes A\,\Xi_2 B{\searrow}C{\searrow}F'\,\Xi_4 D,\xi\gamma',a_p\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash}(\mathbf{e},\,\Xi M\,\Xi_1 N\otimes A\,\Xi_2 B{\searrow}C{\searrow}F'\,\Xi_4 D{\searrow}E,\phi,a_q\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash}(\mathbf{e},\,\Xi M\,\Xi_1 N\otimes A\,\Xi_2 B{\searrow}C{\searrow}F,\phi\eta',a_k\ldots a_n)\\ & \vdash(\mathbf{e},\,\Xi M\,\Xi_1 N\otimes A\,\Xi_2 B{\searrow}G,\phi\eta'\eta,a_k\ldots a_n)\end{array}$$

$$\frac{\begin{array}{c}[M,m \mid C,j,\gamma,\searrow F,k,\eta' \mid D,p,\gamma',E,q]\mathbf{e}\\ [A,h \mid B,i,\gamma'',\searrow C,j,\gamma \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}\\ [M,m \mid N,t,\gamma''',\otimes A,h,\gamma' \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}\end{array}}{[A,h \mid B,i,\gamma'',\searrow G,k,\eta \mid C,j,\gamma,\searrow F,k]\mathbf{e}} \quad (\mathbf{e},C\searrow F,\epsilon) \longmapsto (\mathbf{e},G,\eta)$$

$$\begin{array}{rl}(\mathbf{w},\,\Xi M,\xi,a_m\ldots a_n) & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\,\Xi M\,\Xi_1 N,\xi'\gamma''',a_t\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\,\Xi M\,\Xi_1 N\otimes A,\xi\gamma',a_h\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\,\Xi M\,\Xi_1 N\otimes A\,\Xi_2 B,\xi\gamma'\gamma,a_i\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\,\Xi M\,\Xi_1 N\otimes A\,\Xi_2 B{\rightarrow}C,\xi\gamma'\gamma,a_j\ldots a_n)\\ & \vdash (\mathbf{w},\,\Xi M\,\Xi_1 N\otimes A\,\Xi_2 B{\rightarrow}C\searrow F',\xi\gamma',a_j\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\,\Xi M\,\Xi_1 N\otimes A\,\Xi_2 B{\rightarrow}C\searrow F'\,\Xi_3 D,\xi\gamma',a_p\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e},\,\Xi M\,\Xi_1 N\otimes A\,\Xi_2 B{\rightarrow}C\searrow F'\,\Xi_3 D\searrow E,\phi,a_q\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e},\,\Xi M\,\Xi_1 N\otimes A\,\Xi_2 B{\rightarrow}C\searrow F,\phi\eta',a_k\ldots a_n)\\ & \vdash (\mathbf{e},\,\Xi M\,\Xi_1 N\otimes A\,\Xi_2 B{\rightarrow}G,\phi\eta'\eta,a_k\ldots a_n)\end{array}$$

$$\frac{\begin{array}{c}[M,m \mid C,j,\gamma,\searrow F,k,\eta' \mid D,p,\gamma',E,q]\mathbf{e}\\ [A,h \mid B,i,\gamma,\rightarrow C,j,\gamma \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}\\ [M,m \mid N,t,\gamma''',\otimes A,h,\gamma' \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}\end{array}}{[A,h \mid B,i,\gamma,\rightarrow G,k,\eta \mid C,j,\gamma,\searrow F,k]\mathbf{e}} \quad (\mathbf{e},C\searrow F,\epsilon) \longmapsto (\mathbf{e},G,\eta)$$

$$\begin{array}{rl}(\mathbf{w},\,\Xi M,\xi,a_m\ldots a_n) & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\,\Xi M\,\Xi_1 N,\xi'\gamma''',a_t\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\,\Xi M\,\Xi_1 N\otimes B,\xi\gamma',a_h\ldots a_n)\\ & \overset{0}{\vdash} (\mathbf{w},\,\Xi M\,\Xi_1 N\otimes B,\xi\gamma',a_i\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\,\Xi M\,\Xi_1 N\otimes B\nearrow C,\xi\gamma'\gamma,a_j\ldots a_n)\\ & \vdash (\mathbf{w},\,\Xi M\,\Xi_1 N\otimes B\nearrow C\searrow F',\xi\gamma',a_j\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\,\Xi M\,\Xi_1 N\otimes B\nearrow C\searrow F'\,\Xi_2 D,\xi\gamma',a_p\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e},\,\Xi M\,\Xi_1 N\otimes B\nearrow C\searrow F'\,\Xi_2 D\searrow E,\phi,a_q\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e},\,\Xi M\,\Xi_1 N\otimes B\nearrow C\searrow F,\phi\eta',a_k\ldots a_n)\\ & \vdash (\mathbf{e},\,\Xi M\,\Xi_1 N\otimes B\nearrow G,\phi\eta'\eta,a_k\ldots a_n)\end{array}$$

$$\frac{\begin{array}{c}[M,m \mid C,j,\gamma,\searrow F,k,\eta' \mid D,p,\gamma',E,q]\mathbf{e}\\ [B,i \mid B,i,\gamma',\nearrow C,j,\gamma \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}\\ [M,m \mid N,t,\gamma''',\otimes A,h,\gamma' \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}\end{array}}{[B,i \mid B,i,\gamma',\nearrow G,k,\eta \mid C,j,\gamma,\searrow F,k]\mathbf{e}} \quad (\mathbf{e},C\searrow F,\epsilon) \longmapsto (\mathbf{e},G,\eta)$$

A partir de esta lista se puede mostrar por inducción en la longitud de las derivaciones que tanto mediante la manipulación de configuraciones como mediante la manipulación de ítems se obtienen los mismos resultados. □

La complejidad espacial de la técnica de tabulación propuesta con respecto a la longitud n de la cadena de entrada es $\mathcal{O}(n^5)$ puesto que en cada ítem se almacenan 5 posiciones de la cadena de entrada. La complejidad temporal en el peor caso es $\mathcal{O}(n^7)$ y viene dada por la regla

$$\frac{\begin{array}{c}[C,j \mid C,j,\gamma,\nearrow F,k,\eta' \mid D,p,\gamma',E,q]\mathbf{e}\\ [A,h \mid B,i,\gamma'',\otimes C,j,\gamma \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}\\ [A,h \mid D,p,\gamma',\searrow E,q,\eta \mid O,u,\gamma,P,v]\mathbf{e}\end{array}}{[A,h \mid B,i,\gamma'',\otimes G,k,\eta \mid O,u,\gamma,P,v]\mathbf{e}} \quad (\mathbf{e},C\nearrow F,\eta') \longmapsto (\mathbf{e},G,\epsilon)$$

Esta regla involucra la combinación de 8 posiciones de la cadena de entrada, aunque mediante aplicación parcial sólo es preciso utilizar 7 de dichas posiciones simultáneamente, combinando el primer y tercer ítem antecedente y después combinando el resultado obtenido con el segundo ítem antecedente para obtener finalmente el ítem consecuente. Tal y como muestran De la Clergerie y Alonso Pardo en [53], esta complejidad puede reducirse a $\mathcal{O}(n^6)$ mediante el particionamiento de la regla anterior en las dos reglas siguientes:

$$\frac{\begin{array}{c}[C, j \mid C, j, \gamma, \nearrow F, k, \eta' \mid D, p, \gamma', E, q]\mathbf{e} \\ [A, h \mid D, p, \gamma', \searrow E, q, \eta \mid O, u, \gamma, P, v]\mathbf{e}\end{array}}{[[C, j, \gamma, \nearrow F, k, \eta' \mid O, u, \gamma, P, v]]\mathbf{e}} \quad (\mathbf{e}, C \nearrow F, \eta') \longmapsto (\mathbf{e}, G, \epsilon)$$

$$\frac{\begin{array}{c}[[C, j, \gamma, \nearrow F, k, \eta' \mid O, u, \gamma, P, v]]\mathbf{e} \\ [A, h \mid B, i, \gamma'', \otimes C, j, \gamma \mid -, -, -, -, -]\mathbf{w} \\ [A, h \mid D, p, \gamma', \searrow E, q, \eta \mid O, u, \gamma, P, v]\mathbf{e}\end{array}}{[A, h \mid B, i, \gamma'', \otimes G, k, \eta \mid O, u, \gamma, P, v]\mathbf{e}} \quad (\mathbf{e}, C \nearrow F, \eta') \longmapsto (\mathbf{e}, G, \epsilon)$$

La primera regla combina el primer y tercer ítem antecedente de la regla original, teniendo como consecuente un pseudo-ítem que permitirá transmitir parte de la información presente en los antecedentes a la segunda regla. En particular, es de destacar que la primera regla obvia los campos (A, h). Esta información es recuperada por la segunda regla mediante la combinación del pseudo-ítem con el segundo y tercer ítem antecedente de la regla original. El ítem consecuente de la segunda regla coincide con el ítem consecuente de la regla original, por lo que la aplicación combinada de las dos reglas propuestas es equivalente a la aplicación de la regla original. Sin embargo, hemos logrado reducir la complejidad temporal de $\mathcal{O}(n^7)$ a $\mathcal{O}(n^6)$, ya que que la primera regla tiene una complejidad $\mathcal{O}(n^6)$ (la posición h no interviene), la misma complejidad que presenta la segunda regla, en cuya aplicación las posiciones p y q no intervienen.

10.4 Autómatas con dos pilas ascendentes

Los autómatas con dos pilas fuertemente dirigidos pueden ser utilizados para implementar estrategias de análisis sintáctico para gramáticas de adjunción de árboles independientemente de que las adjunciones se traten de manera descendente o ascendente. Esta potencia expresiva tiene como contrapunto la complejidad espacial $\mathcal{O}(n^5)$ de la interpretación tabular para esta clase de autómatas, cuando los algoritmos tabulares de análisis sintáctico que únicamente consideran el tratamiento ascendente de la adjunción presentan una complejidad $\mathcal{O}(n^4)$ (véase el capítulo 3). Con respecto a la complejidad temporal, en los algoritmos ascendentes se obtiene $\mathcal{O}(n^6)$ de forma directa, mientras que en los autómatas con dos pilas fuertemente dirigidos se obtiene el mismo resultado tras aplicar una sofisticada optimización. Las mismas consideraciones son aplicables a las gramáticas lineales de índices con respecto al tratamiento de las pilas de índices: aquellos algoritmos que evalúan las pilas de índices de forma ascendente presentan menos complejidad espacial y temporal (véase el capítulo 4). En este contexto, surge la cuestión de si es posible diseñar una versión de los SD–2SA especializada en el tratamiento ascendente de la pila auxiliar que rivalice en cuanto a complejidad especial y temporal con los algoritmos tabulares para el análisis sintáctico de LIG y TAG.

Definimos un *autómata con dos pilas ascendente* (*Bottom-up 2–Stack Automata*, BU–2SA) como un autómata con dos pilas fuertemente dirigido sobre el cual se establece la restricción adicional de que las sesiones de la pila auxiliar deben permanecer vacías durante el modo de escritura. Más formalmente, un autómata con dos pilas ascendente se define mediante una tupla $(V_T, V_S, \$_0, \$_f, V_I, \mathcal{D}', \Theta)$ donde

- V_T es un conjunto finito de símbolos terminales.

- V_S es un conjunto finito de símbolos de la pila maestra.
- $\$_0 \in V_S$ es el símbolo inicial de la pila maestra.
- $\$_f \in V_S$ es el símbolo final de la pila maestra.
- V_I es un conjunto finito de símbolos de la pila auxiliar.
- $\mathcal{D}' = \{\models^{\mathbf{w}}, \models^{\mathbf{e}}, \rhd\}$ es el conjunto de marcas de adjunción, resultado de proyectar el conjunto $\mathcal{D} = \{\models^{\mathbf{w}}, \models^{\mathbf{e}}, \nearrow, \rightarrow, \searrow\}$ utilizado por los autómatas con dos pilas fuertemente dirigidos.
- Θ es un conjunto finito de transiciones.

Una *configuración* de un autómata con dos pilas ascendente es una tupla (m, Ξ, ξ, w), donde $m \in \{\mathbf{w}, \mathbf{e}\}$, $\Xi \in (\mathcal{D}'V_S)^*$, $\xi \in (\mathcal{D}'V_I^*)^*$ y $w \in V_T^*$. Los conceptos de *derivación* y *lenguaje aceptado* se definen de modo idéntico a como se hace para los autómatas con dos pilas fuertemente dirigidos.

El conjunto de transiciones de los autómatas con dos pilas ascendentes debe garantizar que las sesiones de la pila auxiliar permanecen vacías durante el modo de escritura, obteniéndose como resultado el siguiente juego de transiciones:

SWAP1 : Transiciones de la forma $(m, C, \epsilon) \overset{a}{\longmapsto} (m, F, \epsilon)$, donde $m \in \{\mathbf{w}, \mathbf{e}\}$, $C, F \in V_S$ y $a \in V_T \cup \epsilon$. El resultado de aplicar una transición de este tipo a una configuración $(m, \Xi C, \xi, aw)$ es una configuración $(m, \Xi F, \xi, w)$.

SWAP2 : Transiciones de la forma $(\mathbf{w}, C, \models^m) \overset{a}{\longmapsto} (\mathbf{e}, F, \models^m)$. El resultado de aplicar una transición este tipo a una configuración $(m, \Xi C, \xi\models^m, aw)$ es una configuración $(m, \Xi F, \xi\models^m, w)$. Estas transiciones son las únicas que permiten pasar del modo de escritura al modo de borrado.

$\models$**WRITE** : Transiciones de la forma $(m, C, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{w}, C\models^m F, \models^m)$ que al ser aplicadas a una configuración $(m, \Xi C, \xi, w)$ producen una configuración $(\mathbf{w}, \Xi C\models^m F, \xi\models^m)$.

$\rhd$**WRITE** : Transiciones de la forma $(\mathbf{w}, C, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{w}, C \rhd F, \epsilon)$ que al ser aplicadas a una transición $(\mathbf{w}, \Xi C, \xi\models^m, w)$ producen una configuración $(\mathbf{w}, \Xi C \rhd F, \xi\models^m, w)$.

$\models$**ERASE** : Transiciones de la forma $(\mathbf{e}, C\models^m F, \models^m) \longmapsto (m, G, \epsilon)$ que al ser aplicadas a una configuración $(m, \Xi C\models^m F, \xi\models^m, w)$ producen una configuración $(m, \Xi G, \xi, w)$.

$\rightarrow$**ERASE** : Transiciones de la forma $(\mathbf{e}, C \rhd F, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{e}, G, \epsilon)$ que al ser aplicadas a una configuración $(\mathbf{e}, \Xi C \rhd F, \xi, w)$ producen una configuración $(\mathbf{e}, \Xi G, \xi, w)$.

$\nearrow$**ERASE** : Transiciones de la forma $(\mathbf{e}, C \rhd F, \eta') \longmapsto (\mathbf{e}, G, \epsilon)$ que al ser aplicadas a una configuración $(\mathbf{e}, \Xi C \rhd F, \xi\eta', w)$ producen una configuración $(\mathbf{e}, \Xi G, \xi, w)$.

$\searrow$**ERASE** : Transiciones de la forma $(\mathbf{e}, C \rhd F, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{e}, G, \eta)$ que al ser aplicadas a una configuración $(\mathbf{e}, \Xi C \rhd F, \xi, w)$ producen una configuración $(\mathbf{e}, \Xi G, \xi\eta, w)$.

Como se puede observar, este juego de transiciones es el resultado de proyectar el conjunto $\mathcal{D}$ en el conjunto $\mathcal{D}'$. Como resultado, las marcas $\nearrow$, $\rightarrow$ y $\searrow$ son sustituidas por una única marca $\rhd$, con lo cual no se predice ninguna información acerca de la formación de la pila auxiliar durante el modo de escritura.

10.4.1 Esquemas de compilación de gramáticas lineales de índices

Al igual que en el caso de los autómatas con dos pilas fuertemente dirigidos, utilizaremos la pila maestra para almacenar no-terminales de la gramática y la pila auxiliar para almacenar los índices. El esquema de compilación genérico se define en función de los siguientes parámetros:

- $\overrightarrow{A}$, la predicción realizada sobre el no-terminal A durante la fase descendente de la estrategia de análisis.
- $\overleftarrow{A}$, la propagación de información respecto al no-terminal A durante la fase ascendente de la estrategia de análisis.

Esquema de compilación 10.3 El esquema de compilación genérico de una gramática lineal de índices en un autómata con dos pilas ascendente queda definido por el conjunto de reglas mostrado en la tabla 10.8 y por los elementos inicial $\$_0$ y final $\overleftarrow{S}$. Este esquema se puede convertir en esquemas de compilación que incorporan estrategias específicas. En la tabla 10.9 se muestran los valores que toman los diferentes parámetros para las estrategias de análisis de LIG más comunes. En dicha tabla, $\square$ indica un símbolo de pila especial que no aparece inicialmente en V_S. §

[INIT]	$(\mathbf{w}, \$_0, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{w}, \$_0 \models^{\mathbf{w}} \nabla_{0,0}, \models^{\mathbf{w}})$	
[CALL]	$(m, \nabla_{r,s}, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{w}, \nabla_{r,s} \models^m \overrightarrow{A_{r,s+1}}, \models^m)$	$A_{r,0}[\circ\circ\gamma] \to \Upsilon_1 A_{r,s+1}[\,]\Upsilon_2$
[SCALL]	$(\mathbf{w}, \nabla_{r,s}, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{w}, \nabla_{r,s} \rhd \overrightarrow{A_{r,s+1}}, \epsilon)$	$A_{r,0}[\circ\circ\gamma] \to \Upsilon_1 A_{r,s+1}[\circ\circ\gamma']\Upsilon_2$
[SEL]	$(\mathbf{w}, \overrightarrow{A_{r,0}}, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{w}, \nabla_{r,0}, \epsilon)$	$r \neq 0$
[PUB]	$(\mathbf{e}, \nabla_{r,n_r}, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{e}, \overleftarrow{A_{r,0}}, \epsilon)$	
[RET]	$(\mathbf{e}, \nabla_{r,s} \models^m \overleftarrow{A_{r,s+1}}, \models^m) \longmapsto (m, \nabla_{r,s+1}, \epsilon)$	$A_{r,0}[\circ\circ\gamma] \to \Upsilon_1 A_{r,s+1}[\,]\Upsilon_2$
[SRET-1]	$(\mathbf{e}, \nabla_{r,s} \rhd \overleftarrow{A_{r,s+1}}, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{e}, \nabla_{r,s+1}, \epsilon)$	$A_{r,0}[\circ\circ] \to \Upsilon_1 A_{r,s+1}[\circ\circ]\Upsilon_2$
[SRET-2]	$(\mathbf{e}, \nabla_{r,s} \rhd \overleftarrow{A_{r,s+1}}, \gamma') \longmapsto (\mathbf{e}, \nabla_{r,s+1}, \epsilon)$	$A_{r,0}[\circ\circ] \to \Upsilon_1 A_{r,s+1}[\circ\circ\gamma']\Upsilon_2$
[SRET-3]	$(\mathbf{e}, \nabla_{r,s} \rhd \overleftarrow{A_{r,s+1}}, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{e}, \nabla_{r,s+1}, \gamma)$	$A_{r,0}[\circ\circ\gamma] \to \Upsilon_1 A_{r,s+1}[\circ\circ]\Upsilon_2$
[SCAN]	$(\mathbf{w}, \overrightarrow{A_{r,0}}, \models^m) \overset{a}{\longmapsto} (\mathbf{e}, \overleftarrow{A_{r,0}}, \models^m)$	$A_{r,0}[\,] \to a$

Tabla 10.8: Reglas del esquema de compilación genérico de LIG en BU–2SA

10.4.2 Esquemas de compilación para gramáticas de adjunción de árboles

Al igual que en el caso de los autómatas con dos pilas fuertemente dirigidos, utilizaremos la pila maestra para almacenar los nodos de los árboles elementales y la pila auxiliar para almacenar

estrategia-CF	$\overrightarrow{A_{r,s+1}}$	$\overleftarrow{A_{r,s+1}}$
Ascendente	$\square$	$A_{r,s+1}$
Earley	$\overline{A_{r,s+1}}$	$\overline{\overline{A_{r,s+1}}}$
Descendente	$A_{r,s+1}$	$\square$

Tabla 10.9: Parámetros del esquema de compilación genérico de LIG en SD–2SA

la pila de adjunciones pendiente en cada nodo. El esquema de compilación genérico mediante la parametrización del flujo de información de las fases de llamada y retorno. Los parámetros a considerar son:

- $\overrightarrow{N^{\gamma}_{r,s}}$, la información predicha acerca del nodo $N^{\gamma}_{r,s}$.
- $\overleftarrow{N^{\gamma}_{r,s}}$, la información propagada acerca del nodo $N^{\gamma}_{r,s}$.

Esquema de compilación 10.4 El esquema de compilación genérico de una gramática de adjunción de árboles en un autómata con dos pilas ascendente queda definido por el conjunto de reglas mostrado en la tabla 10.10 y los elementos inicial $\$_0$ y final $\overleftarrow{\top^{\alpha}}$, con $\alpha \in \boldsymbol{I}$. Este esquema se puede convertir en esquemas de compilación para diferentes estrategias de análisis según los valores que tomen los parámetros, tal y como se indica en la tabla 10.11. §

10.4.3 BU–2SA y los lenguajes de adjunción de árboles

Los lenguajes aceptados por los autómatas con dos pilas ascendentes coinciden con los lenguajes de adjunción de árboles. Para demostrar esta aseveración definiremos y demostraremos los dos teoremas siguientes.

Teorema 10.6 *Los lenguajes adjunción de árboles son un subconjunto de los lenguajes aceptados por la clase de los autómatas con dos pilas ascendentes.*

Demostración:

Por el esquema de compilación de TAG en BU–2SA presentado anteriormente, a partir de cualquier gramática de adjunción de árboles es posible construir un SD–2SA que acepta el lenguaje reconocido por dicha gramática. $\square$

Teorema 10.7 *La clase de los lenguajes aceptados por los autómatas con dos pilas ascendentes es un subconjunto de los lenguajes de adjunción de árboles.*

Demostración:

Mostraremos que para todo SD–2SA existe una gramática lineal de índices tal que el lenguaje reconocido por la gramática coincide con el lenguaje aceptado por el autómata.

Sea $\mathcal{A} = (V_T, V_S, \$_0, \$_f, V_I, \mathcal{D}', \Theta)$ un autómata lineal de índices ascendente. Construiremos una gramática lineal de índices $\mathcal{L} = (V_T, V_N, V_I, S, P)$. El conjunto V_N de no-terminales estará formado por pares $\langle E, B \rangle$ tal que $A, B \in V_S$. Para que $\mathcal{L}$ reconozca el lenguaje aceptado por $\mathcal{A}$ el conjunto de producciones en P ha de construirse a partir de las transiciones en Θ de la siguiente manera:

[INIT]	$(\mathbf{w}, \$_0, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{w}, \$_0 \models^{\mathbf{w}} \nabla^{\alpha}_{0,0}, \models^{\mathbf{w}})$	$\alpha \in \boldsymbol{I}$
[CALL]	$(m, \nabla^{\gamma}_{r,s}, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{w}, \nabla^{\gamma}_{r,s} \models^{m} \overrightarrow{N^{\gamma}_{r,s+1}}, \models^{m})$	$N^{\gamma}_{r,s+1} \not\in \text{espina}(\gamma),\ \mathbf{nil} \in \text{adj}(N_{r,s+1})$
[SCALL]	$(\mathbf{w}, \nabla^{\gamma}_{r,s}, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{w}, \nabla^{\gamma}_{r,s} \rhd \overrightarrow{N^{\gamma}_{r,s+1}}, \epsilon)$	$N^{\gamma}_{r,s+1} \in \text{espina}(\gamma),\ \mathbf{nil} \in \text{adj}(N_{r,s+1})$
[SEL]	$(\mathbf{w}, \overrightarrow{N^{\gamma}_{r,0}}, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{w}, \nabla^{\gamma}_{r,0}, \epsilon)$	$r \neq 0$
[PUB1]	$(\mathbf{e}, \nabla^{\gamma}_{r,n_r}, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{e}, \overleftarrow{N^{\gamma}_{r,0}}, \epsilon)$	
[PUB2]	$(\mathbf{w}, \nabla^{\gamma}_{r,n_r}, \models^{m}) \longmapsto (\mathbf{e}, \overleftarrow{N^{\gamma}_{r,0}}, \models^{m})$	
[RET]	$(\mathbf{e}, \nabla^{\gamma}_{r,s} \models^{m} \overleftarrow{N^{\gamma}_{r,s+1}}, \models^{m}) \longmapsto (m, \nabla^{\gamma}_{r,s+1}, \epsilon)$	$N^{\gamma}_{r,s+1} \not\in \text{espina}(\gamma),\ \mathbf{nil} \in \text{adj}(N_{r,s+1})$
[SRET]	$(\mathbf{e}, \nabla^{\gamma}_{r,s} \rhd \overleftarrow{N^{\gamma}_{r,s+1}}, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{e}, \nabla^{\gamma}_{r,s+1}, \epsilon)$	$N^{\gamma}_{r,s+1} \in \text{espina}(\gamma),\ \mathbf{nil} \in \text{adj}(N_{r,s+1})$
[SCAN]	$(\mathbf{w}, \overrightarrow{N^{\gamma}_{r,0}}, \models^{m}) \overset{a}{\longmapsto} (\mathbf{e}, \overleftarrow{N^{\gamma}_{r,0}}, \models^{m})$	$N^{\gamma}_{r,0}[\,] \to a$
[ACALL]	$(\mathbf{w}, \nabla^{\gamma}_{r,s}, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{w}, \nabla^{\gamma}_{r,s} \rhd \overrightarrow{\top^{\beta}}, \epsilon)$	$\beta \in \text{adj}(N^{\gamma}_{r,s+1})$
[ARET]	$(\mathbf{e}, \nabla^{\gamma}_{r,s} \rhd \overleftarrow{\top^{\beta}}, N^{\gamma}_{r,s+1}) \longmapsto (\mathbf{e}, \nabla^{\gamma}_{r,s+1}, \epsilon)$	$\beta \in \text{adj}(N^{\gamma}_{r,s+1})$
[FCALL]	$(\mathbf{w}, \nabla^{\beta}_{f,0}, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{w}, \nabla^{\beta}_{f,0} \rhd \overrightarrow{N^{\gamma}_{r,s+1}}, \epsilon)$	$N^{\beta}_{f,0} = \mathbf{F}^{\beta},\ \beta \in \text{adj}(N^{\gamma}_{r,s+1})$
[FRET]	$(\mathbf{w}, \nabla^{\beta}_{f,0} \rhd \overleftarrow{N^{\gamma}_{r,s+1}}, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{e}, \nabla^{\beta}_{f,1}, N^{\gamma}_{r,s+1})$	$N^{\beta}_{f,0} = \mathbf{F}^{\beta},\ \beta \in \text{adj}(N^{\gamma}_{t,s+1})$

Tabla 10.10: Reglas del esquema de compilación genérico de TAG en BU–2SA

- Para toda transición $(m, C, \epsilon) \overset{a}{\longmapsto} (m, F, \epsilon)$ y para todo $E \in P$ creamos una producción

$$\langle E, F\rangle[\circ\circ] \to \langle E, C\rangle[\circ\circ]\ a$$

- Para toda transición $(\mathbf{w}, C, \models^{m}) \overset{a}{\longmapsto} (\mathbf{e}, F, \models^{m})$ y para todo $E \in P$ creamos una producción

$$\langle E, F\rangle[\circ\circ] \to \langle E, C\rangle[\circ\circ]\ a$$

- Para toda transición $(\mathbf{w}, C, \epsilon) \overset{a}{\longmapsto} (\mathbf{w}, C \rhd F, \epsilon)$ creamos una producción

$$\langle C, F\rangle[\,] \to \epsilon$$

- Para toda transición $(m, C, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{w}, C \models^{m} F, \models^{m})$ creamos una producción

$$\langle C, F\rangle[\,] \to \epsilon$$

- Para toda transición $(\mathbf{e}, C \models^{m} F, \models^{m}) \longmapsto (m, G, \epsilon)$ y para todo $E \in P$ creamos una producción

$$\langle E, G\rangle[\circ\circ] \to \langle E, C\rangle[\circ\circ]\ \langle C, F\rangle[\,]$$

- Para toda transición $(\mathbf{e}, C \rhd F, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{e}, G, \epsilon)$ y para todo $E \in P$ creamos una producción

$$\langle E, G\rangle[\circ\circ] \to \langle E, C\rangle[\,]\ \langle C, F\rangle[\circ\circ]$$

Estrategia-CF	$\overrightarrow{N^{\gamma}_{r,s+1}}$	$\overleftarrow{N^{\gamma}_{r,s+1}}$
Ascendente	$\Box$	$N^{\gamma}_{r,s+1}$
Earley	$\overline{N^{\gamma}_{r,s+1}}$	$\overline{\overline{N^{\gamma}_{r,s+1}}}$
Descendente	$N^{\gamma}_{r,s+1}$	$\Box$

Tabla 10.11: Parámetros del esquema de compilación genérico de TAG en BU–2SA

- Para toda transición $(\mathbf{e}, C \rhd F, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{e}, G, \gamma')$ y para todo $E \in P$ creamos una producción
$$\langle E, G\rangle[\circ\circ\gamma'] \rightarrow \langle E, C\rangle[\,]\ \langle C, F\rangle[\circ\circ]$$
- Para toda transición $(\mathbf{e}, C \rhd F, \gamma) \longmapsto (\mathbf{e}, G, \epsilon)$ y para todo $E \in P$ creamos una producción
$$\langle E, G\rangle[\circ\circ] \rightarrow \langle E, C\rangle[\,]\ \langle C, F\rangle[\circ\circ\gamma]$$

Con respecto al axioma de la gramática, tenemos que $S = \langle \$_0, \$_f\rangle$.

Las derivaciones de la gramática lineal de índices obtenida y del autómata con dos pilas ascendente cumplen las siguientes propiedades:

- $\langle E, B\rangle[\alpha] \stackrel{*}{\Rightarrow} w$, con $\alpha \neq \epsilon$, si y sólo si $(\mathbf{w}, E, \epsilon, w) \stackrel{*}{\vdash} (\mathbf{e}, E \rhd B, \alpha, \epsilon)$.
- $\langle E, B\rangle[\,] \stackrel{*}{\Rightarrow} w$ si y sólo si $(m, E, \epsilon, w) \stackrel{*}{\vdash} (\mathbf{e}, E {\models^m} B, {\models^m}, \epsilon)$.

La veracidad de estas dos propiedades se demuestra mediante inducción mutua en la longitud de las respectivas derivaciones:

- Si una derivación $(\mathbf{w}, E, \epsilon, w) \stackrel{*}{\vdash} (\mathbf{e}, E \rhd B, \alpha, \epsilon)$, con $\alpha \neq \epsilon$, es el resultado de aplicar la secuencia $t_1, \ldots, t_m$ de transiciones en Θ, entonces existe una secuencia $p_1, \ldots, p_m$ de producciones en P tal que p_i es una producción creada a partir de t_i y la derivación derecha $\langle E, B\rangle[\alpha] \stackrel{*}{\Rightarrow} w$ resultado de aplicar $p_m, \ldots, p_1$ reconoce w.

- Si una derivación $(m, E, \epsilon, w) \stackrel{*}{\vdash} (\mathbf{e}, E {\models^m} B, {\models^m}, \epsilon)$ es el resultado de aplicar la secuencia $t_1, \ldots, t_m$ de transiciones en Θ, entonces existe una secuencia $p_1, \ldots, p_m$ de producciones en P tal que p_i es una producción creada a partir de t_i y la derivación derecha $\langle E, B\rangle[\,] \stackrel{*}{\Rightarrow} w$ resultado de aplicar $p_m, \ldots, p_1$ reconoce w.

- Si una derivación derecha $\langle E, B\rangle[\alpha] \stackrel{*}{\Rightarrow} w$, con $\alpha \neq \epsilon$, reconoce la cadena w como resultado de aplicar la secuencia $p_1, \ldots, p_m$ de producciones en P, entonces existe una secuencia de transiciones $t_1, \ldots, t_m$ tal que la p_i es una producción creada a partir de t_i y la derivación $(\mathbf{w}, E, \epsilon, w) \stackrel{*}{\vdash} (\mathbf{e}, E \rhd B, \alpha, , \epsilon)$ es el resultado de aplicar la secuencia de transiciones $t_m, \ldots, t_1$.

- Si una derivación derecha $\langle E, B\rangle[\ ] \stackrel{*}{\Rightarrow} w$ reconoce la cadena w como resultado de aplicar la secuencia $p_1, \ldots, p_m$ de producciones en P, entonces existe una secuencia de transiciones $t_1, \ldots, t_m$ tal que la p_i es una producción creada a partir de t_i y la derivación $(m, E, \epsilon, w) \stackrel{*}{\vdash} (\mathbf{e}, E {\models^m} B, {\models^m}, \epsilon)$ es el resultado de aplicar la secuencia de transiciones $t_m, \ldots, t_1$.

$\Box$

Ejemplo 10.2 El autómata con dos pilas ascendente de la tabla 10.12 acepta el lenguaje $\{a^n b^n c^n d^n \mid n > 0\}$. En la tabla 10.13 se muestra la derivación para la cadena de entrada *aaabbbcccddd* en dicho autómata. La primera columna indica la transición aplicada, la segunda señala el modo del autómata en ese momento, la tercera muestra el contenido de la pila maestra, la cuarta muestra el contenido de la pila auxiliar y la quinta muestra la parte de la cadena de entrada que resta por leer.

Resulta interesante comparar este autómata con el autómata con dos pilas fuertemente dirigido definido en la tabla 10.1. Denotaremos por $|X|$ el número de elementos X apilados en la pila maestra. En el caso del SD–2SA de la tabla 10.1 se comprueba que $|A| = |B|$ durante el modo de escritura mediante la manipulación de los elementos γ almacenados en la pila auxiliar. En el modo de borrado, las transiciones que extraían elementos de la pila maestra se encargaban de comprobar que $|B| = |C|$ y que $|A| = |D|$ al tiempo que mediante la manipulación de los elementos η en la pila se comprobaba que $|C| = |D|$. En el caso del BU–2SA de la tabla 10.12 no se realiza la comprobación de que $|A| = |B|$ durante el modo de escritura. Sin embargo, durante el modo de borrado se comprueba que $|B| = |C|$, $|A| = |D|$ y $|C| = |D|$ y en tal caso, por transitividad, se cumple que $|A| = |B|$.

En el caso del SD–2SA de la tabla 10.1, la comprobación de que $|A| = |B|$ durante el modo de llamada le permite mantener la propiedad del prefijo válido. En cambio, el BU–2SA de la tabla 10.12 no garantiza dicha propiedad puesto que la no gramaticalidad de la cadena de entrada *aabbbcccddd* sólo puede determinarse después de leer *aabbbcccdd*, que no es prefijo de ninguna cadena válida del lenguaje aceptado por el autómata, y detectar que $|A| \neq |D|$.

En la tabla 10.14 se muestran las producciones de la gramática lineal de índices obtenida a partir de las transiciones del autómata con dos pilas ascendente. Utilizamos Γ para representar cualquier símbolo de pila. La derivación de la cadena *aaabbbcccddd* con esta gramática se muestra en la tabla 10.15, en la cual la primera columna indica la producción aplicada. ¶

10.4.4 Tabulación

Las derivaciones de los autómatas con dos pilas ascendentes se pueden clasificar en los tres tipos siguientes:

Derivaciones de llamada. Son aquellas que dependen únicamente de la cima de la pila maestra ya que la sesión en la cima de la pila auxiliar está vacía. Presentan la forma:

$$(\mathbf{w},\, \Xi B, \xi {\models^{m'}}, a_i \dots a_n) \ \overset{*}{\vdash} (m,\, \Xi B \rhd C, \xi {\models^{m'}}, a_j \dots a_n)$$

donde $\mathbf{w} \leq m$ y tanto B como C pertenecen a la misma sesión. En la derivación, se puede consultar B pero no se permite la consulta ni la alteración de Ξ y ξ. En la figura 10.4 se muestra una representación gráfica de este tipo de derivaciones[2].

Para cualquier $\Xi' \in (\mathcal{D}' V_S)^*$ y $\xi' \in (\models^x V_I^*)^*$ tal que $x \in \{\mathbf{w}, \mathbf{e}\}$ y el número de sesiones en Ξ' y ξ' coincide, se cumple

$$(\mathbf{w},\, \Xi' B, \xi' {\models^{m'}}, a_i \dots a_n) \ \overset{*}{\vdash} (m,\, \Xi' B \rhd C, \xi' {\models^{m'}}, a_j \dots a_n)$$

[2]Puesto que m no es necesariamente $\mathbf{w}$, este tipo de derivaciones pueden extenderse más allá del modo de escritura y por tanto la denominación de *derivaciones de llamada* puede parecer contraproducente. Sin embargo, con el fin de mantener la homogeneidad con el resto de los modelos de autómata, hemos optado por mantener tal denominación.

(a)	$(\mathbf{w}, \$_0, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{w}, \$_0 \models^{\mathbf{w}} A, \models^{\mathbf{w}})$
(b)	$(\mathbf{w}, A, \epsilon) \overset{a}{\longmapsto} (\mathbf{w}, A', \epsilon)$
(c)	$(\mathbf{w}, A', \epsilon) \longmapsto (\mathbf{w}, A' \rhd A, \epsilon)$
(d)	$(\mathbf{w}, A', \epsilon) \overset{b}{\longmapsto} (\mathbf{w}, B', \epsilon)$
(e)	$(\mathbf{w}, B', \epsilon) \longmapsto (\mathbf{w}, B' \rhd B, \epsilon)$
(f)	$(\mathbf{w}, B, \epsilon) \overset{b}{\longmapsto} (\mathbf{w}, B', \epsilon)$
(g)	$(\mathbf{w}, B', \models^{m}) \overset{c}{\longmapsto} (\mathbf{e}, C', \models^{m})$
(h)	$(\mathbf{e}, B' \rhd C', \epsilon) \longmapsto (\mathbf{e}, C, \eta)$
(i)	$(\mathbf{e}, C, \epsilon) \overset{c}{\longmapsto} (\mathbf{e}, C', \epsilon)$
(j)	$(\mathbf{e}, C', \epsilon) \overset{d}{\longmapsto} (\mathbf{e}, D', \epsilon)$
(k)	$(\mathbf{e}, A' \rhd D') \longmapsto (\mathbf{e}, D, \epsilon)$
(l)	$(\mathbf{e}, D, \epsilon) \overset{d}{\longmapsto} (\mathbf{e}, D', \epsilon)$
(m)	$(\mathbf{e}, D', \epsilon) \longmapsto (\mathbf{e}, \$_f, \epsilon)$

Tabla 10.12: Transiciones del BU–2SA que acepta $\{a^n b^n c^n d^n \mid n > 0\}$

	$\mathbf{w}$	$\models^{\mathbf{w}}\$_0$	$\models^{\mathbf{w}}$	$aaabbbcccddd$
(a)	$\mathbf{w}$	$\models^{\mathbf{w}}\$_0 \ \models^{\mathbf{w}}A$	$\models^{\mathbf{w}}\models^{\mathbf{w}}$	$aaabbbcccddd$
(b)	$\mathbf{w}$	$\models^{\mathbf{w}}\$_0 \ \models^{\mathbf{w}}A'$	$\models^{\mathbf{w}}\models^{\mathbf{w}}$	$aabbbcccddd$
(c)	$\mathbf{w}$	$\models^{\mathbf{w}}\$_0 \ \models^{\mathbf{w}}A' \ \rhd A$	$\models^{\mathbf{w}}\models^{\mathbf{w}}$	$aabbbcccddd$
(b)	$\mathbf{w}$	$\models^{\mathbf{w}}\$_0 \ \models^{\mathbf{w}}A' \ \rhd A'$	$\models^{\mathbf{w}}\models^{\mathbf{w}}$	$abbbcccddd$
(c)	$\mathbf{w}$	$\models^{\mathbf{w}}\$_0 \ \models^{\mathbf{w}}A' \ \rhd A' \ \rhd A$	$\models^{\mathbf{w}}\models^{\mathbf{w}}$	$abbbcccddd$
(b)	$\mathbf{w}$	$\models^{\mathbf{w}}\$_0 \ \models^{\mathbf{w}}A' \ \rhd A' \ \rhd A'$	$\models^{\mathbf{w}}\models^{\mathbf{w}}$	$bbbcccddd$
(d)	$\mathbf{w}$	$\models^{\mathbf{w}}\$_0 \ \models^{\mathbf{w}}A' \ \rhd A' \ \rhd B'$	$\models^{\mathbf{w}}\models^{\mathbf{w}}$	$bbcccddd$
(e)	$\mathbf{w}$	$\models^{\mathbf{w}}\$_0 \ \models^{\mathbf{w}}A' \ \rhd A' \ \rhd B' \ \rhd B$	$\models^{\mathbf{w}}\models^{\mathbf{w}}$	$bbcccddd$
(f)	$\mathbf{w}$	$\models^{\mathbf{w}}\$_0 \ \models^{\mathbf{w}}A' \ \rhd A' \ \rhd B' \ \rhd B'$	$\models^{\mathbf{w}}\models^{\mathbf{w}}$	$bcccddd$
(e)	$\mathbf{w}$	$\models^{\mathbf{w}}\$_0 \ \models^{\mathbf{w}}A' \ \rhd A' \ \rhd B' \ \rhd B' \ \rhd B$	$\models^{\mathbf{w}}\models^{\mathbf{w}}$	$bcccddd$
(f)	$\mathbf{w}$	$\models^{\mathbf{w}}\$_0 \ \models^{\mathbf{w}}A' \ \rhd A' \ \rhd B' \ \rhd B' \ \rhd B'$	$\models^{\mathbf{w}}\models^{\mathbf{w}}$	$cccddd$
(g)	$\mathbf{e}$	$\models^{\mathbf{w}}\$_0 \ \models^{\mathbf{w}}A' \ \rhd A' \ \rhd B' \ \rhd B' \ \rhd C'$	$\models^{\mathbf{w}}\models^{\mathbf{w}}$	$ccddd$
(h)	$\mathbf{e}$	$\models^{\mathbf{w}}\$_0 \ \models^{\mathbf{w}}A' \ \rhd A' \ \rhd B' \ \rhd C$	$\models^{\mathbf{w}}\models^{\mathbf{w}} \eta$	$ccddd$
(i)	$\mathbf{e}$	$\models^{\mathbf{w}}\$_0 \ \models^{\mathbf{w}}A' \ \rhd A' \ \rhd B' \ \rhd C'$	$\models^{\mathbf{w}}\models^{\mathbf{w}} \eta$	$cddd$
(h)	$\mathbf{e}$	$\models^{\mathbf{w}}\$_0 \ \models^{\mathbf{w}}A' \ \rhd A' \ \rhd C$	$\models^{\mathbf{w}}\models^{\mathbf{w}} \eta\, \eta$	$cddd$
(i)	$\mathbf{e}$	$\models^{\mathbf{w}}\$_0 \ \models^{\mathbf{w}}A' \ \rhd A' \ \rhd C'$	$\models^{\mathbf{w}}\models^{\mathbf{w}} \eta\, \eta$	ddd
(j)	$\mathbf{e}$	$\models^{\mathbf{w}}\$_0 \ \models^{\mathbf{w}}A' \ \rhd A' \ \rhd D'$	$\models^{\mathbf{w}}\models^{\mathbf{w}} \eta\, \eta$	dd
(k)	$\mathbf{e}$	$\models^{\mathbf{w}}\$_0 \ \models^{\mathbf{w}}A' \ \rhd D$	$\models^{\mathbf{w}}\models^{\mathbf{w}} \eta$	dd
(l)	$\mathbf{e}$	$\models^{\mathbf{w}}\$_0 \ \models^{\mathbf{w}}A' \ \rhd D'$	$\models^{\mathbf{w}}\models^{\mathbf{w}} \eta$	d
(k)	$\mathbf{e}$	$\models^{\mathbf{w}}\$_0 \ \models^{\mathbf{w}}D$	$\models^{\mathbf{w}}\models^{\mathbf{w}}$	d
(l)	$\mathbf{e}$	$\models^{\mathbf{w}}\$_0 \ \models^{\mathbf{w}}D'$	$\models^{\mathbf{w}}\models^{\mathbf{w}}$	
(m)	$\mathbf{e}$	$\models^{\mathbf{w}}\$_0 \ \models^{\mathbf{w}}\$_f$	$\models^{\mathbf{w}}\models^{\mathbf{w}}$	

Tabla 10.13: Configuraciones del BU–2SA para la cadena de entrada $aaabbbcccddd$

(a)	$\langle \$_0, A\rangle[\,] \to \epsilon$
(b)	$\langle \Gamma, A'\rangle[\circ\circ] \to \langle \Gamma, A\rangle[\circ\circ]\ \ a$
(c)	$\langle A', A\rangle[\,] \to \epsilon$
(d)	$\langle \Gamma, B'\rangle[\circ\circ] \to \langle \Gamma, A'\rangle[\circ\circ]\ \ b$
(e)	$\langle B', B\rangle[\,] \to \epsilon$
(f)	$\langle \Gamma, B'\rangle[\circ\circ] \to \langle \Gamma, B\rangle[\circ\circ]\ \ b$
(g)	$\langle \Gamma, C'\rangle[\circ\circ] \to \langle \Gamma, B'\rangle[\circ\circ]\ \ c$
(h)	$\langle \Gamma, C\rangle[\circ\circ\eta] \to \langle \Gamma, B'\rangle[\,]\ \ \langle B', C'\rangle[\circ\circ]$
(i)	$\langle \Gamma, C'\rangle[\circ\circ] \to \langle \Gamma, C\rangle[\circ\circ]\ \ c$
(j)	$\langle \Gamma, D'\rangle[\circ\circ] \to \langle \Gamma, C'\rangle[\circ\circ]\ \ d$
(k)	$\langle \Gamma, D\rangle[\circ\circ] \to \langle \Gamma, A'\rangle[\,]\ \ \langle A', D'\rangle[\circ\circ]$
(l)	$\langle \Gamma, D'\rangle[\circ\circ] \to \langle \Gamma, D\rangle[\circ\circ]\ \ d$
(m)	$\langle \Gamma, \$_f\rangle[\circ\circ] \to \langle \Gamma, D'\rangle[\circ\circ]$

Tabla 10.14: Producciones de la LIG obtenida a partir del BU–2SA

		$\langle \$_0, \$_f\rangle[\,]$
(m)	$\Rightarrow$	$\langle \$_0, D'\rangle[\,]$
(l)	$\Rightarrow$	$\langle \$_0, D\rangle[\,]\ \ d$
(k)	$\Rightarrow$	$\langle \$_0, A'\rangle[\,]\ \ \langle A', D'\rangle[\,]\ \ d$
(l)	$\Rightarrow$	$\langle \$_0, A'\rangle[\,]\ \ \langle A', D\rangle[\,]\ \ dd$
(k)	$\Rightarrow$	$\langle \$_0, A'\rangle[\,]\ \ \langle A', A'\rangle[\,]\ \ \langle A', D'\rangle[\,]\ \ dd$
(j)	$\Rightarrow$	$\langle \$_0, A'\rangle[\,]\ \ \langle A', A'\rangle[\,]\ \ \langle A', C'\rangle[\,]\ \ ddd$
(i)	$\Rightarrow$	$\langle \$_0, A'\rangle[\,]\ \ \langle A', A'\rangle[\,]\ \ \langle A', C\rangle[\,]\ \ cddd$
(h)	$\Rightarrow$	$\langle \$_0, A'\rangle[\,]\ \ \langle A', A'\rangle[\,]\ \ \langle A', B'\rangle[\,]\ \ \langle B', C'\rangle[\,]\ \ cddd$
(i)	$\Rightarrow$	$\langle \$_0, A'\rangle[\,]\ \ \langle A', A'\rangle[\,]\ \ \langle A', B'\rangle[\,]\ \ \langle B', C\rangle[\,]\ \ ccddd$
(h)	$\Rightarrow$	$\langle \$_0, A'\rangle[\,]\ \ \langle A', A'\rangle[\,]\ \ \langle A', B'\rangle[\,]\ \ \langle B', B'\rangle[\,]\ \ \langle B', C'\rangle[\,]\ \ ccddd$
(g)	$\Rightarrow$	$\langle \$_0, A'\rangle[\,]\ \ \langle A', A'\rangle[\,]\ \ \langle A', B'\rangle[\,]\ \ \langle B', B'\rangle[\,]\ \ \langle B', B'\rangle[\,]\ \ cccddd$
(f)	$\Rightarrow$	$\langle \$_0, A'\rangle[\,]\ \ \langle A', A'\rangle[\,]\ \ \langle A', B'\rangle[\,]\ \ \langle B', B'\rangle[\,]\ \ \langle B', B\rangle[\,]\ \ bcccddd$
(e)	$\Rightarrow$	$\langle \$_0, A'\rangle[\,]\ \ \langle A', A'\rangle[\,]\ \ \langle A', B'\rangle[\,]\ \ \langle B', B'\rangle[\,]\ \ bcccddd$
(f)	$\Rightarrow$	$\langle \$_0, A'\rangle[\,]\ \ \langle A', A'\rangle[\,]\ \ \langle A', B'\rangle[\,]\ \ \langle B', B\rangle[\,]\ \ bbcccddd$
(e)	$\Rightarrow$	$\langle \$_0, A'\rangle[\,]\ \ \langle A', A'\rangle[\,]\ \ \langle A', B'\rangle[\,]\ \ bbcccddd$
(d)	$\Rightarrow$	$\langle \$_0, A'\rangle[\,]\ \ \langle A', A'\rangle[\,]\ \ \langle A', A'\rangle[\,]\ \ bbbcccddd$
(b)	$\Rightarrow$	$\langle \$_0, A'\rangle[\,]\ \ \langle A', A'\rangle[\,]\ \ \langle A', A\rangle[\,]\ \ abbbcccddd$
(c)	$\Rightarrow$	$\langle \$_0, A'\rangle[\,]\ \ \langle A', A'\rangle[\,]\ \ abbbcccddd$
(b)	$\Rightarrow$	$\langle \$_0, A'\rangle[\,]\ \ \langle A', A\rangle[\,]\ \ aabbbcccddd$
(c)	$\Rightarrow$	$\langle \$_0, A'\rangle[\,]\ \ aabbbcccddd$
(b)	$\Rightarrow$	$\langle \$_0, A\rangle[\,]\ \ aaabbbcccddd$
(a)	$\Rightarrow$	$aaabbbcccddd$

Tabla 10.15: Derivación en LIG de la cadena *aaabbbcccddd*

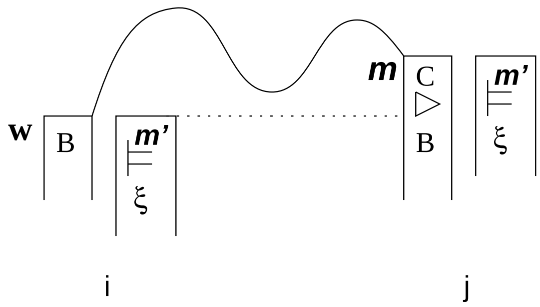

Figura 10.4: Derivaciones de llamada en BU-2SA

por lo que este tipo de derivaciones puede ser representado de manera compacta por los correspondientes ítems de la forma

$$[B, i, \triangleright C, j, \models^{m'} \mid -, -, -, -, -]m$$

Derivaciones de retorno. Son aquellas que se inician en una sesión en modo de escritura y terminan en la misma sesión en modo de borrado con una sesión no vacía en la cima de la pila auxiliar. Presentan la forma

$$\begin{array}{ll}(\mathbf{w},\, \Xi B, \xi{\models^m}, a_i \ldots a_n) & \overset{*}{\vdash}_{d_1} (\mathbf{w},\, \Xi B\, \Xi_1 D, \xi{\models^m}, a_p \ldots a_n) \\ & \overset{*}{\vdash}_{d_2} (\mathbf{e},\, \Xi B\, \Xi_1 D \triangleright E, \xi{\models^m}\phi, a_q \ldots a_n) \\ & \overset{*}{\vdash}_{d_3} (\mathbf{e},\, \Xi B \otimes C, \xi{\models^m}\phi\eta, a_j \ldots a_n)\end{array}$$

donde $\otimes \in \mathcal{D}'$, $\phi \in V_I^*$, $\eta \in V_I$ y tanto B como D, E y C pertenecen a la misma sesión. La subderivación d_1 puede consultar B pero no puede consultar ni alterar Ξ y ξ. La subderivación d_2 puede consultar D pero no puede consultar ni alterar $\Xi B\, \Xi_1$ ni ξ. Finalmente, la pila $\xi{\models^m}$ es la misma en toda la derivación. Es importante señalar que si $\otimes = \models^m$, entonces la derivación no puede conducir a la aceptación de la cadena de entrada puesto que no es posible eliminar ϕ de la pila auxiliar. Sin embargo, tal tipo de derivaciones puede obtenerse y por tanto es necesario considerarlas. En la figura 10.5 se muestra una representación gráfica de este tipo de derivaciones.

Para cualquier $\Xi' \in (\mathcal{D}' V_S)^*$ y $\xi' \in (\models^x V_I^*)^*$ tal que $x \in \{\mathbf{w}, \mathbf{e}\}$, el número de sesiones en Ξ' y ξ' coincide y existe una derivación

$$(\mathbf{w}, D, \xi{\models^m}, a_p \ldots a_n) \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e}, D \triangleright E, \xi{\models^m}\phi, a_q \ldots a_n)$$

se cumple que

$$\begin{array}{ll}(\mathbf{w},\, \Xi' B, \xi'{\models^m}, a_i \ldots a_n) & \overset{*}{\vdash}_{d_1} (\mathbf{w},\, \Xi' B\, \Xi_1 D, \xi'{\models^m}, a_p \ldots a_n) \\ & \overset{*}{\vdash}_{d_2} (\mathbf{e},\, \Xi' B\, \Xi_1 D \triangleright E, \xi'{\models^m}\phi, a_q \ldots a_n) \\ & \overset{*}{\vdash}_{d_3} (\mathbf{e},\, \Xi' B \otimes C, \xi'{\models^m}\phi\eta, a_j \ldots a_n)\end{array}$$

Ello posibilita que las derivaciones de retorno puedan ser representadas por ítems de la forma

$$[B, i, \otimes C, j, \eta \mid D, p, \models^m, E, q]\mathbf{e}$$

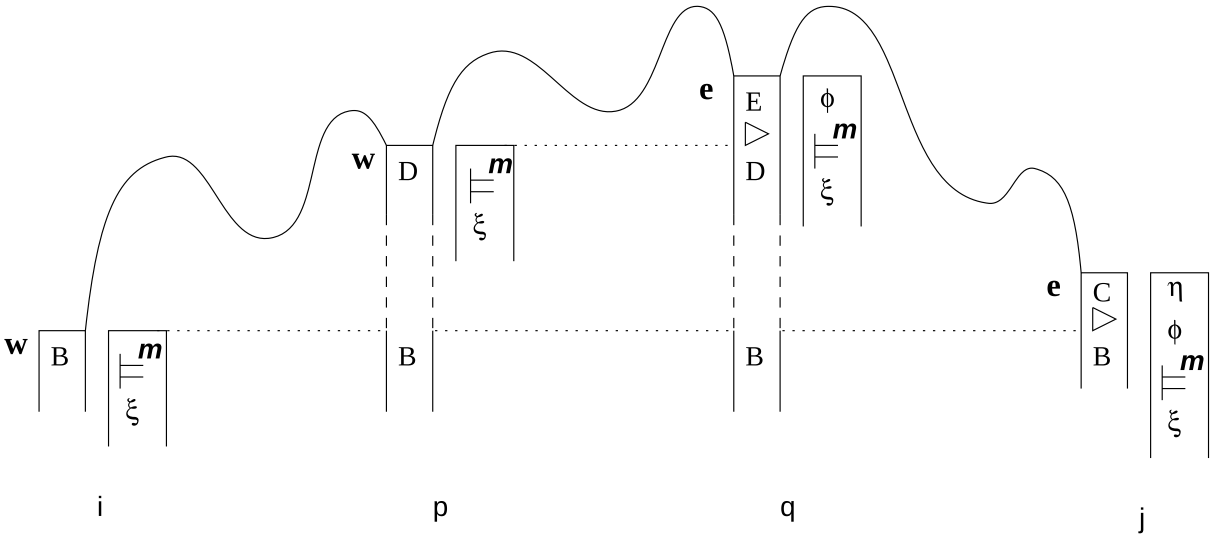

Figura 10.5: Derivaciones de retorno en BU-2SA

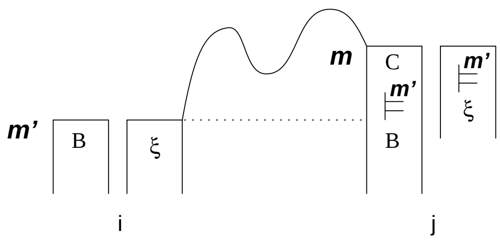

Figura 10.6: Derivaciones de puntos especiales en BU-2SA

Derivaciones de puntos especiales. Son aquellas derivaciones que finalizan en una sesión mínima, con un único elemento el la pila maestra y ninguna en la auxiliar. Estas configuraciones se tienen típicamente cuando se acaba de crear una nueva sesión y cuando se está a punto de finalizar una sesión. Presentan la forma

$$(m',\, \Xi B, \xi, a_i \dots a_n) \overset{*}{\vdash} (m,\, \Xi B {\models^{m'}} C, \xi {\models^{m'}}, a_j \dots a_n)$$

Este tipo de derivaciones se muestra gráficamente en la figura 10.6.

Para cualquier $\Xi' \in (\mathcal{D}' V_S)^*$ y $\xi' \in (\models^x V_I^*)^*$ tal que $x \in \{\mathbf{w}, \mathbf{e}\}$ y el número de sesiones en Ξ' y ξ' coincide, se cumple

$$(m',\, \Xi' B, \xi', a_i \dots a_n) \overset{*}{\vdash} (m,\, \Xi' B {\models^{m'}} C, \xi' {\models^{m'}}, a_j \dots a_n)$$

por lo que podemos utilizar ítems de la siguientes formas para representar este tipo de derivaciones:

$$[B, i, \models^{m'} C, j, \models^{m'} \mid -, -, -, -, -]m$$

Los ítems se combinan mediante las reglas descritas en la tabla 10.16, a partir del ítem inicial

$$[-, -, \models^{\mathbf{w}} \$_0, 0, \models^{\mathbf{w}} \mid -, -, -, -, -]\mathbf{w}$$

La aceptación de la cadena se entrada $a_1 \dots a_n$ se indica mediante la presencia de ítems de la forma

$$[\$_0, 0, \models^{\mathbf{w}} \$_f, n, \models^{\mathbf{w}} \mid -, -, -, -, -]\mathbf{e}$$

$$\frac{[B,i,\otimes C,j,\eta \mid D,p,\models^{m'},E,q]m}{[B,i,\otimes F,k,\eta \mid D,p,\models^{m'},E,q]m} \quad \begin{array}{l}(m,C,\epsilon) \stackrel{a}{\longmapsto} (m,F,\epsilon),\\ k=j \text{ si } a=\epsilon,\ \ k=j+1 \text{ si } a\in V_T\end{array}$$

$$\frac{[B,i,\otimes C,j,\eta \mid D,p,\models^{m'},E,q]m}{[C,j,\models^m F,j,\models^m \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}} \quad (m,C,\epsilon) \longmapsto (\mathbf{w},C\models^m F,\models^m)$$

$$\frac{[B,i,\otimes C,j,\models^m \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}}{[C,j,\rhd F,j,\models^m \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}} \quad (\mathbf{w},C,\epsilon) \longmapsto (\mathbf{w},C \rhd F,\epsilon)$$

$$\frac{[B,i,\otimes C,j,\models^m \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}}{[B,i,\otimes F,k,\models^m \mid -,-,-,-,-]\mathbf{e}} \quad \begin{array}{l}(\mathbf{w},C,\models^m) \stackrel{a}{\longmapsto} (\mathbf{e},F,\models^m),\\ k=j \text{ si } a=\epsilon,\ \ k=j+1 \text{ si } a\in V_T\end{array}$$

$$\frac{\begin{array}{c}[C,j,\models^m F,k,\models^m \mid -,-,-,-,-]\mathbf{e}\\ [B,i,\otimes C,j,\eta \mid D,p,\models^{m'},E,q]m\end{array}}{[B,i,\otimes G,k,\eta \mid D,p,\models^{m'},E,q]m} \quad (\mathbf{e},C\models^m F,\models^m) \longmapsto (m,G,\epsilon)$$

$$\frac{\begin{array}{c}[C,j,\rhd F,k,\eta \mid D,p,\models^m,E,q]\mathbf{e}\\ [B,i,\otimes C,j,\models^m \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}\end{array}}{[B,i,\otimes G,k,\eta \mid D,p,\models^m,E,q]\mathbf{e}} \quad (\mathbf{e},C \rhd F,\epsilon) \longmapsto (\mathbf{e},G,\epsilon)$$

$$\frac{\begin{array}{c}[C,j,\rhd F,k,\eta' \mid D,p,\models^m,E,q]\mathbf{e}\\ [B,i,\otimes_1 C,j,\models^m \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}\\ [D,p,\otimes_2 E,q,\eta \mid O,u,\models^m,P,v]\mathbf{e}\end{array}}{[B,i,\otimes_1 G,k,\eta \mid O,u,\models^m,P,v]\mathbf{e}} \quad (\mathbf{e},C \rhd F,\eta') \longmapsto (\mathbf{e},G,\epsilon)$$

$$\frac{\begin{array}{c}[C,j,\rhd F,k,\eta' \mid D,p,\models^m,E,q]\mathbf{e}\\ [B,i,\otimes C,j,\models^m \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}\end{array}}{[B,i,\otimes G,k,\eta \mid C,j,\models^m,F,k]\mathbf{e}} \quad (\mathbf{e},C \rhd F,\epsilon) \longmapsto (\mathbf{e},G,\eta)$$

Tabla 10.16: Reglas de combinación de ítems en BU-2SA

Teorema 10.8 *La manipulación de configuraciones mediante la aplicación de transiciones en los autómatas con dos pilas ascendentes es equivalente a la manipulación de ítems mediante las reglas de combinación de la tabla 10.16.*

Demostración:

Mostraremos que para toda derivación existe una regla de combinación que produce un ítem que representa de forma compacta dicha derivación y que toda regla de combinación se corresponde con una derivación válida del autómata. Para ello detallaremos todas las posibles derivaciones, junto con las reglas de combinación ítems correspondientes, en la siguiente lista.

- Derivaciones que son el resultado de aplicar una transición $(m,C,\epsilon) \stackrel{a}{\longmapsto} (m,F,\epsilon)$

– a una derivación de llamada:

$$\begin{array}{ll}(\mathbf{w},\, \Xi B, \xi {\models}^{m'}, a_i \ldots a_n) & \overset{*}{\vdash} (m,\, \Xi B \rhd C, \xi {\models}^{m'}, a_j \ldots a_n) \\ & \vdash (m,\, \Xi B \rhd F, \xi {\models}^{m'}, a_k \ldots a_n)\end{array}$$

$$\frac{[B, i, \rhd C, j, {\models}^{m'} \mid -,-,-,-,-]m}{[B, i, \rhd F, k, {\models}^{m'} \mid -,-,-,-,-]m} \quad (m, C, \epsilon) \overset{a}{\longmapsto} (m, F, \epsilon)$$

– a una derivación de retorno:

$$\begin{array}{ll}(\mathbf{w},\, \Xi B, \xi {\models}^{m}, a_i \ldots a_n) & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\, \Xi B\, \Xi_1 D, \xi {\models}^{m}, a_p \ldots a_n) \\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e},\, \Xi B\, \Xi_1 D \rhd E, \xi {\models}^{m} \phi, a_q \ldots a_n) \\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e},\, \Xi B \otimes C, \xi {\models}^{m} \phi\eta, a_j \ldots a_n) \\ & \vdash (\mathbf{e},\, \Xi B \otimes F, \xi {\models}^{m} \phi\eta, a_k \ldots a_n)\end{array}$$

$$\frac{[B, i, \otimes C, j, \eta \mid D, p, {\models}^{m}, E, q]\mathbf{e}}{[B, i, \otimes F, k, \eta \mid D, p, {\models}^{m}, E, q]\mathbf{e}} \quad (\mathbf{e}, C, \epsilon) \overset{a}{\longmapsto} (\mathbf{e}, F, \epsilon)$$

– a una derivación de puntos especiales:

$$\begin{array}{ll}(m',\, \Xi B, \xi, a_i \ldots a_n) & \overset{*}{\vdash} (m,\, \Xi B {\models}^{m'} C, \xi {\models}^{m'}, a_j \ldots a_n) \\ & \vdash (m,\, \Xi B {\models}^{m'} F, \xi {\models}^{m'}, a_k \ldots a_n)\end{array}$$

$$\frac{[B, i, {\models}^{m'} C, j, {\models}^{m'} \mid -,-,-,-,-]m}{[B, i, {\models}^{m'} F, k, {\models}^{m'} \mid -,-,-,-,-]m} \quad (m, C, \epsilon) \overset{a}{\longmapsto} (m, F, \epsilon)$$

donde $k = j$ si $a = \epsilon$ y $k = j + 1$ si $a \in V_T$:

- Derivaciones que son el resultado de aplicar una transición de tipo $(m, C, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{w}, C {\models}^{m} F, {\models}^{m})$

– a una derivación de llamada:

$$\begin{array}{ll}(\mathbf{w},\, \Xi B, \xi {\models}^{m'}, a_i \ldots a_n) & \overset{*}{\vdash} (m,\, \Xi B \rhd C, \xi {\models}^{m'}, a_j \ldots a_n) \\ & \vdash (\mathbf{w},\, \Xi B \rhd C {\models}^{m} F, \xi {\models}^{m'} {\models}^{m}, a_j \ldots a_n)\end{array}$$

$$\frac{[B, i, \rhd C, j, {\models}^{m'} \mid -,-,-,-,-]m}{[C, j, {\models}^{m} F, j, {\models}^{m} \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}} \quad (m, C, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{w}, C {\models}^{m} F, {\models}^{m})$$

– a una derivación de retorno:

$$\begin{array}{ll}(\mathbf{w},\, \Xi B, \xi {\models}^{m'}, a_i \ldots a_n) & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\, \Xi B\, \Xi_1 D, \xi {\models}^{m'}, a_p \ldots a_n) \\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e},\, \Xi B\, \Xi_1 D \rhd E, \xi {\models}^{m'} \phi, a_q \ldots a_n) \\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e},\, \Xi B \otimes C, \xi {\models}^{m'} \phi\eta, a_j \ldots a_n) \\ & \vdash (\mathbf{w},\, \Xi B \otimes C {\models}^{\mathbf{e}} F, \xi {\models}^{m'} \phi\eta {\models}^{\mathbf{e}}, a_j \ldots a_n)\end{array}$$

$$\frac{[B, i, \otimes C, j, \eta \mid D, p, {\models}^{m'}, E, q]\mathbf{e}}{[C, j, {\models}^{\mathbf{e}} F, j, {\models}^{\mathbf{e}} \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}} \quad (\mathbf{e}, C, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{w}, C {\models}^{\mathbf{e}} F, {\models}^{\mathbf{e}})$$

– a una derivación de puntos especiales:

$$\begin{array}{ll}(m',\, \Xi B, \xi, a_i \ldots a_n) & \overset{*}{\vdash} (m,\, \Xi B {\models}^{m'} C, \xi {\models}^{m'}, a_j \ldots a_n) \\ & \vdash (\mathbf{w},\, \Xi B {\models}^{m'} C {\models}^{m} F, \xi {\models}^{m'} {\models}^{m}, a_j \ldots a_n)\end{array}$$

$$\frac{[B, i, {\models}^{m'} C, j, {\models}^{m'} \mid -,-,-,-,-]m}{[C, j, {\models}^{m} F, j, {\models}^{m} \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}} \quad (m, C, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{w}, C {\models}^{m} F, {\models}^{m})$$

- Derivaciones que son el resultado de aplicar una transición de tipo $(\mathbf{w}, C, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{w}, C \rhd F, \epsilon)$
  - a una derivación de llamada:

$$\begin{array}{ll}(\mathbf{w},\, \Xi B, \xi{\models^m}, a_i \dots a_n) & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\, \Xi B \rhd C, \xi{\models^m}, a_j \dots a_n) \\ & \vdash (\mathbf{w},\, \Xi B \rhd C \rhd F, \xi{\models^m}, a_j \dots a_n)\end{array}$$

$$\frac{[B, i, \rhd C, j, \models^m \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}}{[C, j, \rhd F, j, \models^m \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}} \quad (\mathbf{w}, C, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{w}, C \rhd F, \epsilon)$$

  - a una derivación de puntos especiales:

$$\begin{array}{ll}(m,\, \Xi B, \xi, a_i \dots a_n) & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\, \Xi B{\models^m} C, \xi{\models^m}, a_j \dots a_n) \\ & \vdash (\mathbf{w},\, \Xi B{\models^m} C \rhd F, \xi{\models^m}, a_j \dots a_n)\end{array}$$

$$\frac{[B, i, \models^m C, j, \models^m \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}}{[C, j, \rhd F, j, \models^m \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}} \quad (\mathbf{w}, C, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{w}, C \rhd F, \epsilon)$$

- Derivaciones que son el resultado de aplicar una transición de tipo $(\mathbf{w}, C, \models^m) \overset{a}{\longmapsto} (\mathbf{e}, F, \models^m)$
  - a una derivación de llamada:

$$\begin{array}{ll}(\mathbf{w},\, \Xi B, \xi{\models^m}, a_i \dots a_n) & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\, \Xi B \rhd C, \xi{\models^m}, a_j \dots a_n) \\ & \vdash (\mathbf{e},\, \Xi B \rhd F, \xi{\models^m}, a_k \dots a_n)\end{array}$$

$$\frac{[B, i, \rhd C, j, \models^m \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}}{[B, i, \rhd F, k, \models^m \mid -,-,-,-,-]\mathbf{e}} \quad (\mathbf{w}, C, \models^m) \overset{a}{\longmapsto} (\mathbf{e}, F, \models^m)$$

  - a una derivación de puntos especiales:

$$\begin{array}{ll}(m,\, \Xi B, \xi, a_i \dots a_n) & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\, \Xi B{\models^m} C, \xi{\models^m}, a_j \dots a_n) \\ & \vdash (\mathbf{e},\, \Xi B{\models^m} F, \xi{\models^m}, a_k \dots a_n)\end{array}$$

$$\frac{[B, i, \models^m C, j, \models^m \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}}{[B, i, \models^m F, k, \models^m \mid -,-,-,-,-]\mathbf{e}} \quad (\mathbf{w}, C, \models^m) \overset{a}{\longmapsto} (\mathbf{e}, F, \models^m)$$

  donde $k = j$ si $a = \epsilon$ y $k = j + 1$ si $a \in V_T$:

- Derivaciones que son el resultado de aplicar una transición de tipo $(\mathbf{e}, C{\models^m} F, \models^m) \longmapsto (m, G, \epsilon)$ a una derivación obtenida tras aplicar una transición $(m, C, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{w}, C{\models^m} F', \models^m)$
  - a una derivación de llamada:

$$\begin{array}{ll}(\mathbf{w},\, \Xi B, \xi{\models^{m'}}, a_i \dots a_n) & \overset{*}{\vdash} (m,\, \Xi B \rhd C, \xi{\models^{m'}}, a_j \dots a_n) \\ & \vdash (\mathbf{w},\, \Xi B \rhd C{\models^m} F', \xi{\models^{m'}}{\models^m}, a_j \dots a_n) \\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e},\, \Xi B \rhd C{\models^m} F, \xi{\models^{m'}}{\models^m}, a_k \dots a_n) \\ & \vdash (m,\, \Xi B \rhd G, \xi{\models^{m'}}, a_k \dots a_n)\end{array}$$

$$\frac{\begin{array}{c}[C, j, \models^m F, k, \models^m \mid -,-,-,-,-]\mathbf{e} \\ [B, i, \rhd C, j, \models^{m'} \mid -,-,-,-,-]m\end{array}}{[B, i, \rhd G, k, \models^{m'} \mid -,-,-,-,-]m} \quad (\mathbf{e}, C{\models^{\mathbf{w}}} F, \models^{\mathbf{w}}) \longmapsto (\mathbf{w}, G, \epsilon)$$

  - a una derivación de retorno:

$$\begin{array}{ll}(\mathbf{w},\, \Xi B, \xi{\models^{m'}}, a_i \dots a_n) & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\, \Xi B\, \Xi_1 D, \xi{\models^{m'}}, a_p \dots a_n) \\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e},\, \Xi B\, \Xi_1 D \rhd E, \xi{\models^{m'}} \phi, a_q \dots a_n) \\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e},\, \Xi B \otimes C, \xi{\models^{m'}} \phi\eta, a_j \dots a_n) \\ & \vdash (\mathbf{w},\, \Xi B \otimes C{\models^{\mathbf{e}}} F', \xi{\models^{m'}} \phi\eta{\models^{\mathbf{e}}}, a_j \dots a_n) \\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e},\, \Xi B \otimes C{\models^{\mathbf{e}}} F, \xi{\models^{m'}} \phi\eta{\models^{\mathbf{e}}}, a_k \dots a_n) \\ & \vdash (\mathbf{e},\, \Xi B \otimes G, \xi{\models^{m'}} \phi\eta, a_k \dots a_n)\end{array}$$

$$\frac{\begin{array}{c}[C,j,\models^{\mathbf{e}}F,k,\models^{\mathbf{e}} \mid -,-,-,-,-]\mathbf{e}\\ [B,i,\otimes C,j,\eta \mid D,p,\models^{m'},E,q]\mathbf{e}\end{array}}{[B,i,\otimes G,k,\eta \mid D,p,\models^{m'},E,q]\mathbf{e}} \quad (\mathbf{e},C\models^{\mathbf{e}}F,\models^{\mathbf{e}}) \longmapsto (\mathbf{e},G,\epsilon)$$

– a una derivación de puntos especiales:

$$\begin{array}{rl}(m',\,\Xi B,\xi,a_i\ldots a_n) & \overset{*}{\vdash} (m,\,\Xi B\models^{m'}C,\xi\models^{m'},a_j\ldots a_n)\\ & \vdash (\mathbf{w},\,\Xi B\models^{m'}C\models^{m}F',\xi\models^{m'}\models^{m},a_j\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e},\,\Xi B\models^{m'}C\models^{m}F,\xi\models^{m'}\models^{m},a_k\ldots a_n)\\ & \vdash (m,\,\Xi B\models^{m'}G,\xi\models^{m'},a_k\ldots a_n)\end{array}$$

$$\frac{\begin{array}{c}[C,j,\models^{m}F,k,\models^{m} \mid -,-,-,-,-]\mathbf{e}\\ [B,i,\models^{m'}C,j,\models^{m'} \mid -,-,-,-,-]m\end{array}}{[B,i,\models^{m'}G,k,\models^{m'} \mid -,-,-,-,-]m} \quad (\mathbf{e},C\models^{m}F,\models^{m}) \longmapsto (m,G,\epsilon)$$

- Derivaciones que son el resultado de aplicar una transición de tipo $(\mathbf{e},C \rhd F,\epsilon) \longmapsto (\mathbf{e},G,\epsilon)$ a una derivación obtenida tras aplicar una transición $(\mathbf{w},C,\epsilon) \longmapsto (\mathbf{w},C \rhd F',\epsilon)$
  – a una derivación de llamada:

$$\begin{array}{rl}(\mathbf{w},\,\Xi B,\xi\models^{m},a_i\ldots a_n) & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\,\Xi B \rhd C,\xi\models^{m},a_j\ldots a_n)\\ & \vdash (\mathbf{w},\,\Xi B \rhd C \rhd F',\xi\models^{m},a_j\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\,\Xi B \rhd C \rhd F'\,\Xi_1 D,\xi\models^{m},a_p\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e},\,\Xi B \rhd C \rhd F'\,\Xi_1 D \rhd E,\xi\models^{m}\phi,a_q\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e},\,\Xi B \rhd C \rhd F,\xi\models^{m}\phi\eta,a_k\ldots a_n)\\ & \vdash (\mathbf{e},\,\Xi B \rhd G,\xi\models^{m}\phi\eta,a_k\ldots a_n)\end{array}$$

$$\frac{\begin{array}{c}[C,j,\rhd F,k,\eta \mid D,p,\models^{m},E,q]\mathbf{e}\\ [B,i,\rhd C,j,\models^{m} \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}\end{array}}{[B,i,\rhd G,k,\eta \mid D,p,\models^{m},E,q]\mathbf{e}} \quad (\mathbf{e},C \rhd F,\epsilon) \longmapsto (\mathbf{e},G,\epsilon)$$

  – a una derivación de puntos especiales:

$$\begin{array}{rl}(m,\,\Xi B,\xi,a_i\ldots a_n) & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\,\Xi B\models^{m}C,\xi\models^{m},a_j\ldots a_n)\\ & \vdash (\mathbf{w},\,\Xi B\models^{m}C \rhd F',\xi\models^{m},a_j\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e},\,\Xi B\models^{m}C \rhd F,\xi\models^{m},a_k\ldots a_n)\\ & \vdash (\mathbf{e},\,\Xi B\models^{m}G,\xi\models^{m},a_k\ldots a_n)\end{array}$$

$$\frac{\begin{array}{c}[C,j,\rhd F,k,\models^{m} \mid -,-,-,-,-]\mathbf{e}\\ [B,i,\models^{m}C,j,\models^{m} \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}\end{array}}{[B,i,\models^{m}G,k,\models^{m} \mid -,-,-,-,-]\mathbf{e}} \quad (\mathbf{e},C \rhd F,\epsilon) \longmapsto (\mathbf{e},G,\epsilon)$$

- Derivaciones que son el resultado de aplicar una transición de tipo $(\mathbf{e},C \rhd F,\eta') \longmapsto (\mathbf{e},G,\epsilon)$ a una derivación obtenida tras aplicar una transición $(\mathbf{w},C,\epsilon) \longmapsto (\mathbf{w},C \rhd F',\epsilon)$
  – a una derivación de llamada, con los dos casos siguientes:

$$\begin{array}{rl}(\mathbf{w},\,\Xi B,\xi\models^{m},a_i\ldots a_n) & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\,\Xi B \rhd C,\xi\models^{m},a_j\ldots a_n)\\ & \vdash (\mathbf{w},\,\Xi B \rhd C \rhd F',\xi\models^{m},a_j\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\,\Xi B \rhd C \rhd F'\,\Xi_1 D,\xi\models^{m},a_p\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\,\Xi B \rhd C \rhd F'\,\Xi_1 D\,\Xi_2 O,\xi\models^{m},a_u\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e},\,\Xi B \rhd C \rhd F'\,\Xi_1 D\,\Xi_2 O \rhd P,\xi\models^{m}\phi\eta,a_u\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e},\,\Xi B \rhd C \rhd F'\,\Xi_1 D \rhd E,\xi\models^{m}\phi\eta,a_q\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e},\,\Xi B \rhd C \rhd F,\xi\models^{m}\phi\eta\eta',a_k\ldots a_n)\\ & \vdash (\mathbf{e},\,\Xi B \rhd G,\xi\models^{m}\phi\eta,a_k\ldots a_n)\end{array}$$

$$\frac{\begin{array}{l}[C,j,\rhd F,k,\eta' \mid D,p,\models^m,E,q]\mathbf{e}\\ [B,i,\rhd C,j,\models^m \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}\\ [D,p,\rhd E,q,\eta \mid O,u,\models^m,P,v]\mathbf{e}\end{array}}{[B,i,\rhd G,k,\eta \mid O,u,\models^m,P,v]\mathbf{e}} \quad (\mathbf{e},C\rhd F,\eta') \longmapsto (\mathbf{e},G,\epsilon)$$

$$\begin{array}{rl}(\mathbf{w},\,\Xi B,\xi{\models^m},a_i\ldots a_n) & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\,\Xi B \rhd C,\xi{\models^m},a_j\ldots a_n)\\ & \vdash (\mathbf{w},\,\Xi B \rhd C \rhd F',\xi{\models^m},a_j\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\,\Xi B \rhd C \rhd F'\;\Xi D,\xi{\models^m},a_p\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e},\,\Xi B \rhd C \rhd F'\;\Xi D \rhd E,\xi{\models^m},a_q\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e},\,\Xi B \rhd C \rhd F,\xi{\models^m}\eta',a_k\ldots a_n)\\ & \vdash (\mathbf{e},\,\Xi B \rhd G,\xi{\models^m},a_k\ldots a_n)\end{array}$$

$$\frac{\begin{array}{l}[C,j,\rhd F,k,\eta' \mid D,p,\models^m,E,q]\mathbf{e}\\ [B,i,\rhd C,j,\models^m \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}\\ [D,p,\rhd E,q,\models^m \mid -,-,-,-,-]\mathbf{e}\end{array}}{[B,i,\rhd G,k,\models^m \mid -,-,-,-,-]\mathbf{e}} \quad (\mathbf{e},C\rhd F,\eta') \longmapsto (\mathbf{e},G,\epsilon)$$

– a una derivación de puntos especiales, con los dos casos siguientes:

$$\begin{array}{rl}(m,\,\Xi B,\xi,a_i\ldots a_n) & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\,\Xi B{\models^m}C,\xi{\models^m},a_j\ldots a_n)\\ & \vdash (\mathbf{w},\,\Xi B{\models^m}C \rhd F',\xi{\models^m},a_j\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\,\Xi B{\models^m}C \rhd F'\;\Xi_1 D,\xi{\models^m},a_p\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e},\,\Xi B{\models^m}C \rhd F'\;\Xi_1 D \rhd E,\xi{\models^m},a_q\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e},\,\Xi B{\models^m}C \rhd F,\xi{\models^m}\eta',a_k\ldots a_n)\\ & \vdash (\mathbf{e},\,\Xi B{\models^m}G,\xi{\models^m},a_k\ldots a_n)\end{array}$$

$$\frac{\begin{array}{l}[C,j,\rhd F,k,\eta' \mid D,p,\models^m,E,q]\mathbf{e}\\ [B,i,\models^m C,j,\models^m \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}\\ [D,p,\rhd E,q,\eta \mid -,-,-,-,-]\mathbf{e}\end{array}}{[B,i,\models^m G,k,\eta \mid -,-,-,-,-]\mathbf{e}} \quad (\mathbf{e},C\rhd F,\eta') \longmapsto (\mathbf{e},G,\epsilon)$$

$$\begin{array}{rl}(m,\,\Xi B,\xi,a_i\ldots a_n) & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\,\Xi B{\models^m}C,\xi{\models^m},a_j\ldots a_n)\\ & \vdash (\mathbf{w},\,\Xi B{\models^m}C \rhd F',\xi{\models^m},a_j\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\,\Xi B{\models^m}C \rhd F'\;\Xi_1 D,\xi{\models^m},a_p\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\,\Xi B{\models^m}C \rhd F'\;\Xi_1 D\;\Xi O,\xi{\models^m},a_u\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e},\,\Xi B{\models^m}C \rhd F'\;\Xi_1 D\;\Xi O \rhd P,\xi{\models^m}\phi,a_v\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e},\,\Xi B{\models^m}C \rhd F'\;\Xi_1 D \rhd E,\xi{\models^m}\phi\eta,a_q\ldots a_n)\\ & \overset{*}{\vdash} (\mathbf{e},\,\Xi B{\models^m}C \rhd F,\xi{\models^m}\phi\eta\eta',a_k\ldots a_n)\\ & \vdash (\mathbf{e},\,\Xi B{\models^m}G,\xi{\models^m}\phi\eta,a_k\ldots a_n)\end{array}$$

$$\frac{\begin{array}{l}[C,j,\rhd F,k,\eta' \mid D,p,\models^m,E,q]\mathbf{e}\\ [B,i,\models^m C,j,\models^m \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}\\ [D,p,\rhd E,q,\eta \mid O,u,\models^m,P,v]\mathbf{e}\end{array}}{[B,i,\models^m G,k,\eta \mid O,u,\models^m,P,v]\mathbf{e}} \quad (\mathbf{e},C\rhd F,\eta') \longmapsto (\mathbf{e},G,\epsilon)$$

En este caso la configuración resultante no puede conducir a una configuración final porque la pila auxiliar contiene en su cima una sesión no vacía que es imposible eliminar.

- Derivaciones que son el resultado de aplicar una transición de tipo $(\mathbf{e},C\rhd F,\epsilon) \longmapsto (\mathbf{e},G,\eta)$ a una derivación obtenida tras aplicar una transición $(\mathbf{w},C,\epsilon) \longmapsto (\mathbf{w},C\rhd F',\epsilon)$

– a una derivación de llamada, con los dos casos siguientes:

$$\begin{aligned}(\mathbf{w},\, \Xi B, \xi{\models^m}, a_i \dots a_n) &\overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\, \Xi B \rhd C, \xi{\models^m}, a_j \dots a_n)\\ &\vdash (\mathbf{w},\, \Xi B \rhd C \rhd F', \xi{\models^m}, a_j \dots a_n)\\ &\overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\, \Xi B \rhd C \rhd F'\, \Xi_1 D, \xi{\models^m}, a_p \dots a_n)\\ &\overset{*}{\vdash} (\mathbf{e},\, \Xi B \rhd C \rhd F'\, \Xi_1 D \rhd E, \xi{\models^m}\phi, a_q \dots a_n)\\ &\overset{*}{\vdash} (\mathbf{e},\, \Xi B \rhd C \rhd F, \xi{\models^m}\phi\eta', a_k \dots a_n)\\ &\vdash (\mathbf{e},\, \Xi B \rhd G, \xi{\models^m}\phi\eta'\eta, a_k \dots a_n)\end{aligned}$$

$$\frac{\begin{array}{c}[C, j, \rhd F, k, \eta' \mid D, p, \models^m, E, q]\mathbf{e}\\ [B, i, \rhd C, j, \models^m \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}\end{array}}{[B, i, \rhd G, k, \eta \mid C, j, \models^m, F, k]\mathbf{e}} \quad (\mathbf{e}, C \rhd F, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{e}, G, \eta)$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{w},\, \Xi B, \xi{\models^m}, a_i \dots a_n) &\overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\, \Xi B \rhd C, \xi{\models^m}, a_j \dots a_n)\\ &\vdash (\mathbf{w},\, \Xi B \rhd C \rhd F', \xi{\models^m}, a_j \dots a_n)\\ &\overset{*}{\vdash} (\mathbf{e},\, \Xi B \rhd C \rhd F, \xi{\models^m}, a_k \dots a_n)\\ &\vdash (\mathbf{e},\, \Xi B \rhd G, \xi{\models^m}\eta, a_k \dots a_n)\end{aligned}$$

$$\frac{\begin{array}{c}[C, j, \rhd F, k, \models^m \mid -,-,-,-,-]\mathbf{e}\\ [B, i, \rhd C, j, \models^m \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}\end{array}}{[B, i, \rhd G, k, \eta \mid C, j, \models^m, F, k]\mathbf{e}} \quad (\mathbf{e}, C \rhd F, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{e}, G, \eta)$$

– a una derivación de puntos especiales, con los dos casos siguientes:

$$\begin{aligned}(m,\, \Xi B, \xi, a_i \dots a_n) &\overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\, \Xi B{\models^m}C, \xi{\models^m}, a_j \dots a_n)\\ &\vdash (\mathbf{w},\, \Xi B{\models^m}C \rhd F', \xi{\models^m}, a_j \dots a_n)\\ &\overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\, \Xi B{\models^m}C \rhd F'\, \Xi_1 D, \xi{\models^m}, a_p \dots a_n)\\ &\overset{*}{\vdash} (\mathbf{e},\, \Xi B{\models^m}C \rhd F'\, \Xi_1 D \rhd E, \xi{\models^m}\phi, a_q \dots a_n)\\ &\overset{*}{\vdash} (\mathbf{e},\, \Xi B{\models^m}C \rhd F, \xi{\models^m}\phi\eta', a_k \dots a_n)\\ &\vdash (\mathbf{e},\, \Xi B{\models^m}G, \xi{\models^m}\phi\eta'\eta, a_k \dots a_n)\end{aligned}$$

$$\frac{\begin{array}{c}[C, j, \rhd F, k, \eta' \mid D, p, \models^m, E, q]\mathbf{e}\\ [B, i, \models^m C, j, \models^m \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}\end{array}}{[B, i, \models^m G, k, \eta \mid C, j, \models^m, F, k]\mathbf{e}} \quad (\mathbf{e}, C \rhd F, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{e}, G, \eta)$$

$$\begin{aligned}(m,\, \Xi B, \xi, a_i \dots a_n) &\overset{*}{\vdash} (\mathbf{w},\, \Xi B{\models^m}C, \xi{\models^m}, a_j \dots a_n)\\ &\vdash (\mathbf{w},\, \Xi B{\models^m}C \rhd F', \xi{\models^m}, a_j \dots a_n)\\ &\overset{*}{\vdash} (\mathbf{e},\, \Xi B{\models^m}C \rhd F, \xi{\models^m}, a_k \dots a_n)\\ &\vdash (\mathbf{e},\, \Xi B{\models^m}G, \xi{\models^m}\eta, a_k \dots a_n)\end{aligned}$$

$$\frac{\begin{array}{c}[C, j, \rhd F, k, \models^m \mid -,-,-,-,-]\mathbf{e}\\ [B, i, \models^m C, j, \models^m \mid -,-,-,-,-]\mathbf{w}\end{array}}{[B, i, \models^m G, k, \eta \mid C, j, \models^m, F, k]\mathbf{e}} \quad (\mathbf{e}, C \rhd F, \epsilon) \longmapsto (\mathbf{e}, G, \eta)$$

En ambos casos, las configuraciones resultantes no pueden llevar al autómata a una configuración final puesto que al ser la forma de la pila principal $\Xi B{\models^m}G$ y no estar vacía la sesión situada en la cima de la pila auxiliar, es imposible vaciar esta última.

A partir de esta lista se puede mostrar por inducción en la longitud de las derivaciones que tanto mediante la manipulación de configuraciones como mediante la manipulación de ítems se obtienen los mismos resultados. $\square$

La complejidad temporal en el peor caso con respecto a la longitud n de la cadena de entrada es $\mathcal{O}(n^6)$ y viene determinada por la regla de combinación de ítems

$$\frac{\begin{array}{l}[C, j, \triangleright F, k, \eta' \mid D, p, \models^m, E, q]\mathbf{e} \\ [B, i, \otimes_1 C, j, \models^m \mid -, -, -, -, -]\mathbf{w} \\ [D, p, \otimes_2 E, q, \eta \mid O, u, \models^m, P, v]\mathbf{e}\end{array}}{[B, i, \otimes_1 G, k, \eta \mid O, u, \models^m, P, v]\mathbf{e}} \quad (\mathbf{e}, C \triangleright F, \eta') \longmapsto (\mathbf{e}, G, \epsilon)$$

que manipula 7 posiciones de la cadena de entrada, aunque sólo 6 de manera simultánea. La complejidad temporal con respecto a la cadena de entrada es $\mathcal{O}(n^4)$ puesto que cada ítem almacena 4 posiciones de la cadena de entrada.